Beispiele eindimensionaler nichtkommutativer simplizialer Komplexe und ihre K-Gruppen

Thomas Timmermann

17.6.2002

In der vorliegenden Diplomarbeit werden für einige Beispiele eindimensionaler simplizialer Komplexe konkrete Bilder der von Joachim Cuntz in [3] definierten assoziierten universellen C^*-Algebra ermittelt, deren K-Gruppen berechnet, und verschränkte Produkte bezüglich einfacher $\mathbb{Z}_2$- und $\mathbb{Z}_3$-Gruppenoperationen betrachtet. Anschließend wird untersucht, wie weit die angewendeten Techniken verallgemeinert werden können.

Allgemein ist die Arbeit eine kleine Beispielsammlung zum Gebiet "nichtkommutative Topologie", welches geometrische Objekte (z.B. simpliziale Komplexe) durch C^*-Algebren ersetzt (klassisch die Algebra der stetigen Funktionen auf den betrachteten Räumen, im vorliegenden Fall eine nichtkommutative Abwandlung) und die klassischen Methoden der (algebraischen) Topologie (z.B. K-Theorie als eine verallgemeinerte Kohomologietheorie) in der Sprache der C^*-Algebren umformuliert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Ausgangspunkt der Arbeit

Ausgangspunkt der vorliegenden Diplomarbeit war die Untersuchung der universellen C^*-Algebra mit einem Erzeuger z, welcher die Gleichung $zz^* + z^*z = 1$ erfüllt. Hinzufügen der Relation "z normal" liefert eine kommutative C^*-Algebra mit einem "universellen" unitären Erzeuger $\sqrt{2}z$, dessen Spektrum der Kreis ist. Insofern kann man die Ausgangsalgebra als einen "nichtkommutativen Kreis" auffassen.

Ziel war die Berechnung der K-Gruppen dieser Algebra. Als Zwischenschritt sollte ihr Spektrum – die Menge der irreduziblen Darstellungen – bestimmt und daraus ein konkretes Bild der Algebra (z.B. als matrixwertige Funktionenalgebra auf einem geeigneten Raum) gewonnen werden. Als zweites sollten einfache $\mathbb{Z}_2$-Wirkungen auf dieser Algebra betrachtet und die K-Gruppen der entsprechenden verschränkten Produkte berechnet werden.

1.2 Mathematischer Kontext

Ziel der Arbeit war die Aneignung einiger Grundtechniken der "nichtkommutativen Topologie" anhand eines geometrisch motivierten Beispiels.

Allgemein bezeichnet *nichtkommutative* Topologie das Programm, die Begriffe und Methoden der klassischen (algebraischen) Topologie – Homotopie, Kohomologie, Puppe-Sequenzen etc. – auf C^*-Algebren zu übertragen. Ausgangspunkt ist dabei die Gelfand-Dualität zwischen lokalkompakten Räumen und *kommutativen* C^*-Algebren.

Das beste Beispiel dafür ist wahrscheinlich die K-Theorie: In der Topologie ordnet man jedem lokalkompakten Raum X die universelle Gruppe $K^0(X)$ zu, die von der Menge der Vektorbündel auf X mit der Operation der direkten Summe erzeugt wird. Setzt man nun $K^{-n}(X) := K^0(S^nX)$, $n \in \mathbb{N}$, wobei S^nX die n-te *Einhängung* des Raumes X bezeichnet, so erhält man eine Folge K^* von Funktoren, die eine verallge-

meinerte Kohomologietheorie definieren.
Im algebraischen bzw. analytischen Kontext ersetzt man den Raum X durch die Funktionenalgebra $C(X)$, und ein Vektorbündel V über X durch die Menge $\Gamma(V)$ der Schnitte dieses Bündels. Einem Satz von Serre-Swan nach ist $\Gamma(V)$ ein endlich erzeugter projektiver Modul über $C(X)$. Nun definiert man für eine beliebige C^*-Algebra A die Gruppe $K_0(A)$ als universelle Gruppe der endlich erzeugten projektiven A-Moduln (mit direkter Summe als Operation), und erhält, indem man die Konstruktionen aus der algebraischen Topologie nachbildet, eine Kohomologietheorie für C^*-Algebren.
Zentral für die Theorie ist der Periodizitätssatz von Bott, der besagt, daß die Funktoren K_n jeweils für alle geraden bzw. ungerade Zahlen n isomorph sind, so daß sich die Theorie auf zwei Gruppen K_0 und K_1 reduziert. Das hat unter anderem zur Konsequenz, daß sich die K-Gruppen in vielen Beispielen explizit ausrechnen lassen.

Ein natürlicher Untersuchungsgegenstand der nichtkommutativen Topologie sind nichtkommutative Deformationen von Funktionenalgebren, wie z.B. die eingangs beschriebene Algebra. Es stellte sich heraus, daß diese schon in der Literatur untersucht und u.a. als ein *nichtkommutativer simplizialer Komplex* beschrieben worden war (s. [5], [3]). Ein *simplizialer Komplex* ist eine kombinatorische Beschreibung einer Triangularisierung eines topologischen Raumes, und aus dieser kombinatorischen Beschreibung kann die C^*-Algebra der stetigen Funktionen des zugrunde liegenden Raumes durch Angabe von Erzeugern und Relationen rekonstruiert werden. Läßt man nun die Bedingung, daß alle Erzeuger miteinander kommutieren sollen, fallen, so erhält man einen "nichtkommutativen simplizialen Komplex" – eine nichtkommutative C^*-Algebra, welche die ursprüngliche Funktionenalgebra als maximalen kommutativen Quotienten enthält.

Eine zentrale Untersuchungsrichtung der nichtkommutativen Topologie sind Gruppenoperationen. Im klassischen Fall einer Gruppenwirkung auf einem topologischen Raum ist der zugehörige Orbit- bzw. Quotientenraum zwar stets erklärt, trägt aber häufig eine pathologische Topologie oder enthält zuwenig Information über die jeweiligen Orbits. Im "nichtkommutativen Fall", in dem eine Gruppe G auf einer nichtkommutativen C^*-Algebra A mittels eines Homomorphismus $\alpha : G \to Aut(A)$ operiert, ist ein Quotientenraum "gar nicht in Sicht". Er wird ersetzt durch ein *verschränktes Produkt* $A \rtimes_\alpha G$, welches im wesentlichen dadurch entsteht, daß man für jedes Gruppenelement $g \in G$ ein unitäres Element u_g zu A so hinzufügt, daß Konjugation mit u_g gerade der Wirkung von g entspricht.
Operiert in dem klassischen Fall die Gruppe G hinreichend regulär auf

dem Raum X, so hat das entsprechende verschränkte Produkt $C(X) \rtimes G$ im wesentlichen dieselbe Darstellungstheorie wie die Funktionenalgebra $C(X/G)$ des Quotientenraumes (genauer: die Algebren sind Morita-äquivalent), und insbesondere haben beide Algebren dieselben K-Gruppen.

1.3 Inhalt der Arbeit

Nachdem die ursprüngliche Aufgabenstellung bearbeitet war und Andreas Thom mich darauf hinwies, daß die Berechnung der K-Gruppen bereits in dem Artikel (s. [5]) erfolgt war, lag es nahe, für die Diplomarbeit weitere Beispiele nichtkommutativer simplizialer Komplexe zu betrachten.
Erfolgreich konnten lediglich einige eindimensionale Komplexe behandelt werden. Für diese wurde zunächst ein konkretes Bild der zugehörigen – abstrakt durch Erzeuger und Relationen definierten – universellen C^*-Algebra bestimmt, und darauf aufbauend ihre K-Gruppen berechnet.

Aus den Beispielen konnten zwei Kriterien abgeleitet werden, die besagen, für welche eindimensionalen simplizialen Komplexe die assoziierte Algebra bereits kommutativ ist, und wann das Verkleben zweier simplizialer Komplexe an vorgegebenen Punkten – abstrakt ein push-out von Komplexen – auf dem Niveau der assoziierten C^*-Algebren einem pull-back entspricht (für die Funktionenalgebren ist dies stets der Fall).

Zweitens wurden einfache $\mathbb{Z}_2$- bzw. $\mathbb{Z}_3$-Operationen auf den nichtkommutativen simplizialen Komplexen betrachtet und die K-Gruppen der entsprechenden verschränkten Produkte berechnet.

Für eindimensionale simpliziale Komplexe, die als Graphen betrachtet bipartit sind, konnte die assoziierte C^*-Algebra einfach durch eine von Projektionen (mit vorgegebenen Relationen) erzeugte universelle C^*-Algebra beschrieben werden. Da es nicht gelang, allgemeine Aussagen über solche Algebren zu gewinnen, wurde statt dessen eine Klasse universeller C^*-Algebren untersucht, die durch einen deutlich eingeschränkten Satz zulässiger Relationen beschrieben werden können. Diese erlaubten Relationen können in einem Graph kodiert werden, und mittels Induktion über den Aufbau des Graphen kann ein konkreteres Modell der assoziierten Algebra konstruiert werden. Unter Annahme einer Vermutung von Joachim Cuntz und E. Germaine, die für einen Spezialfall von Klaus Thomsen bewiesen wurde, können aus der Konstruktionsvorschrift die K-Gruppen der jeweiligen Algebren abgeleitet werden.

1.4 Gliederung der Arbeit und Abgrenzung des eigenen Anteils

Im ersten Kapitel werden die erforderlichen Grundlagen aus der Literatur bereitgestellt. Dazu wurden im wesentlichen die Bücher [4] und [1] verwendet.

Der erste Abschnitt von Kapitel 3 behandelt ausführlich einen nichkommutativen Kreis. Danach werden abwechselnd Beispiele nichtkommutativer simplizialer Komplexe behandelt, und anschließend die an den Beispielen angewendeten Techniken verallgemeinert. Die Beispiele und Verallgemeinerungen bauen aufeinander auf.

Der Abschnitt 3.3 von Kapitel 3 enthält allgemeine Aussagen über eine kleine Klasse von C^*-Algebren, die von Projektionen erzeugt werden, und kann unabhängig von dem Hauptteil gelesen werden.

Der Inhalt des Kapitels 3 ist mit Ausnahme des ersten Abschnittes vollständig selbst erarbeitet, alle Beispiele sind von mir selbständig aufgestellt und behandelt worden. Die Beweise der Lemma 2.3.2.2 und von Satz 2.3.2.3 sowie 2.4.0.6 sind eigenständig aufgeschrieben, aber (in wesentlich allgemeinerer Form) bereits bekannt.

2 Grundlagen

2.1 C^*-Algebren

Dieser Abschnitt faßt die grundlegenden Definitionen und Konstruktionen, welche für die Behandlung der Beispiele in Kapitel 3 benötigt werden, zusammen.

2.1.1 Definition

2.1.1.1 Definition. *Eine* Banach-Algebra A *ist eine komplexe Algebra mit einer Norm* $\|\cdot\|$*, bezüglich derer* A *vollständig ist, und die submultiplikativ im Sinne* $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ *ist.*

Eine C^*-Algebra A *ist eine Banach-Algebra mit einer isometrischen Involution* $* : A \to A$*, die konjugiert linear ist und den Bedingungen*

$$(a^*)^* = a, \qquad (ab)^* = b^*a^*, \qquad \|a^*a\| = \|a\|^2, \qquad a, b \in A,$$

genügt.

Eine C^**-Algebra* A *heißt* unital*, wenn sie eine 1 enthält und* $\|1\| = 1$ *gilt.*

Ein stetiger Homomorphismus $\phi : A \to B$ *zwischen zwei* C^**-Algebren heißt* $*$-Homomorphismus*, falls* $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ *für alle* $a \in A$*. Sind* A *und* B *unital, so wird im folgenden stets* $\phi(1) = 1$ *vorausgesetzt.*

Im folgenden sind mit Idealen *im Fall von* C^**-Algebren stets bezüglich Norm und* $*$ *abgeschlossene Ideale gemeint.*

Für eine Teilmenge S *einer* C^**-Algebra* A *bezeichne* $\langle S\rangle$ *die von* S *erzeugte* C^**-Unteralgebra von* A *(d.h. die kleinste bezüglich Norm und* $*$ *abgeschlossene Unteralgebra von* A*, die* S *enthält).*

Typische Beispiele unitaler C^*-Algebren sind die Algebra $C(X)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum X und die Algebra $B(H)$ der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum H. Tatsächlich besagt ein Theorem von Gelfand, Naimark und Segal, daß jede kommutative unitale C^*-Algebra von der ersten Form für einen geeigneten Raum X, und jede beliebige C^*-Algebra eine Unteralgebra von $B(H)$ für einen geeigneten Raum H ist.

2.1.1.2 Definition. *Ein Element a einer C^*-Algebra A heißt*

- selbstadjungiert, *falls $a^* = a$;*
- unitär, *falls $aa^* = a^*a = 1$;*
- Projektion, *falls $a^* = a^2 = a$;*
- partielle Isometrie, *falls $aa^*a = a$;*
- Symmetrie, *falls a unitär und selbstadjungiert ist;*
- positiv, *falls $a = b^*b$ für ein $b \in A$.*

Ist A unital, so ist das Spektrum $\sigma(a)$ von a *definiert als* $\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda 1$ *nicht invertierbar in* $A\}$.

Es ist leicht zu zeigen, daß das Spektrum eines jeden Elementes einer unitalen C^*-Algebra kompakt ist.

2.1.1.3 Theorem (Spektraltheorem für normale Elemente)**.** *Sei A eine unitale C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann ist die von a erzeugte C^*-Unteralgebra $\langle 1, a\rangle \subset A$ kommutativ.*
Bezeichne $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ die identische Funktion. Dann definiert die Vorschrift $z \mapsto a$ einen $*$-Isomorphismus $C(\sigma(a)) \to \langle 1, a\rangle$. □

2.1.2 Konstruktionen mit C^*-Algebren

Zuerst betrachten wir verschiedene Konstruktionen, um aus vorgegebenen C^*-Algebren neue Algebren mit gewissen universellen Eigenschaften zu bilden. Danach erläutern wir, wie man C^*-Algebren abstrakt durch Angabe von Erzeugern und Relationen beschreiben kann. Ein Hauptanliegen des Kapitels 3 wird es sein, unter Verwendung der erstgenannten Konstruktionen konkrete Modelle solcher abstrakt definierten C^*-Algebren zu bauen.

2.1.2.1 Definition/Lemma.

- *Ist A eine C^*-Algebra und $I \subset A$ ein Ideal, so ist der* Quotient A/I, *versehen mit der Norm $\|a + I\| := \inf\{\|a + b\| \mid b \in I\}$, wieder eine C^*-Algebra.*

- *Sind A und B zwei C^*-Algebren, so ist ihre* direkte Summe $A \oplus B$, *versehen mit der Norm* $\|(a,b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}$, *wieder eine C^*-Algebra.*

- *Ist A eine C^*-Algebra, so ist die Algebra $M_n(A)$ der* $n \times n$-Matrizen über A, *versehen mit der Involution* $(a_{ij})^*_{i,j} = (a^*_{ji})_{i,j}$ *und der durch*

$$\|\underline{a}\| := \sup\{\|\underline{a}b^T\|_{A^n} \mid b \in A^n,\ \|b\|_{A^n} = 1\}, \quad \underline{a} \in M_n(A),$$

definierten Norm, wieder eine C^*-Algebra.

- *Sei A eine C^*-Algebra. Ihre* Unitalisierung $A^\sim$ *ist die Algebra* $A \oplus \mathbb{C}$, *versehen mit dem Produkt*

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + a\mu + \lambda b, \lambda\mu)$$

und der durch

$$\|(a, \lambda)\| := \sup_{b \in A, \|b\|=1} \|ab + \lambda b\|$$

definierten Norm. Diese Algebra ist eine unitale C^*-Algebra.

- *Sei A eine C^*-Algebra und X ein kompakter Raum. Dann ist die Algebra $C(X, A)$* der stetigen A-wertigen Funktionen auf X, *versehen mit den punktweisen Operationen und der Norm* $\|f\| := \max\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$, *wieder eine C^*-Algebra.*

- *Sei B eine C^*-Algebra mit zwei C^*-Unteralgebren C^0 und C^1. Dann ist*

$$S(B; C^0, C^1) \quad := \quad \{f \in C([0,1], B) \mid f(t) \in C^t \text{ für } t = 0, 1\}$$

eine C^*-Unteralgebra von $C([0,1], B)$.
Die Einhängung SA *einer C^*-Algebra A ist definiert als* $SA := S(A; 0, 0)$.

- *Sei A eine komplexe Algebra mit einer konjugiert-linearen Abbildung $* : A \to A$, welche die Bedingungen $(a^*)^* = a$ und $(ab)^* = b^*a^*$ erfüllt. Angenommen, für jedes Element $a \in A$ ist der Ausdruck*

$$\|a\| := \sup\{\|\rho(a)\| | \rho : A \to B(H) \ *\text{-Homomorphismus}, H \text{ Hilbertraum}\} \tag{2.1}$$

endlich. Dann definiert dies eine Halbnorm auf A, und die Vervollständigung des Quotienten $A/\{a \in A \mid \|a\| = 0\}$ bezüglich der induzierten Norm ist eine C^*-Algebra. Sie heißt die einhüllende C^*-Algebra von A.

Nun zur Konstruktion von pull-backs und push-outs:

2.1.2.2 Definition/Lemma. *Seien A, B und C drei C^*-Algebren mit $*$-Homomorphismen $\phi : A \to C$ und $\psi : B \to C$. Dann ist das* pull-back $A\,{}_{\phi}\!\vee_{\psi}\,B$ von A und B bzgl. ϕ und ψ *definiert als*

$$A\,{}_{\phi}\!\vee_{\psi}\,B \;:=\; \{(a,b) \in A \oplus B \mid \phi(a) = \psi(b)\}\,.$$

Dies ist eine C^*-Unteralgebra von $A \oplus B$, versehen mit offensichtlichen Strukturabbildungen $\pi_A : A \vee B \to A$, $\pi_B : A \vee B \to B$ *sowie* $\phi \vee \psi := \phi \circ \pi_A = \psi \circ \pi_B : A \vee B \to C$.

Das pull-back hat die folgende universelle Eigenschaft: Sei D eine C^*-Algebra und seien $\alpha : D \to A$, $\beta : D \to B$ zwei $*$-Homomorphismen mit $\phi \circ \alpha = \psi \circ \beta$. Dann existiert genau ein $*$-Homomorphismus $\gamma : D \to A \vee B$ mit $\alpha = \pi_A \circ \gamma$ und $\beta = \pi_B \circ \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[dr, "\phi"] & \\
D \arrow[r, dashed, "\gamma"] \arrow[urr, bend left, "\alpha"] \arrow[drr, bend right, "\beta"'] & A \vee B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & & C. \\
& & B \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Seien X und Y topologische Räume mit ausgewählten Punkten $x \in X$ und $y \in Y$. Die Auswertung an den Punkten x und y definiert $*$-Homomorphismen $ev_x : C(X) \to \mathbb{C}$ und $ev_y : C(Y) \to \mathbb{C}$, und es gilt $C(X \vee Y) \cong C(X)\ {}_{ev_x}\!\vee_{ev_y}\ C(Y)$. Wir werden später eine ähnliche Verträglichkeit für eindimensionale simpliziale Komplexe und deren assoziierte C^*-Algebren beweisen (Satz 3.2.5.3).

2.1.2.3 Definition/Lemma. *Seien A, B und C drei C^*-Algebren mit $*$-Homomorphismen $\phi : C \to A$ und $\psi : C \to B$.*
Sei X die freie komplexe $*$-Algebra mit Erzeugern $A \amalg B$ und der durch $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^* = x_n^* \cdot \ldots \cdot x_2^* \cdot x_1^*$, $x_i \in A \amalg B$, definierten konjugiert-linearen Involution. Bezeichne I das von den Elementen

$$(a_1 a_2) - a_1 \cdot a_2,\ a_1, a_2 \in A, \quad (b_1 b_2) - b_1 \cdot b_2,\ b_1, b_2 \in B, \quad \phi(c) - \psi(c),\ c \in C$$

erzeugte $*$-Ideal von X.
Dann ist das push-out $A\,{}_{\phi}\!\star_{\psi}\,B$ von A und B bezüglich ϕ und ψ *definiert als die einhüllende C^*-Algebra von X/I (man überlegt sich leicht, daß die auf X/I gemäß (2.1) definierte Seminorm wirklich endlich ist).*
Sie ist versehen mit den offensichtlichen Strukturabbildungen $\iota_A : A \to A\,{}_{\phi}\!\star_{\psi}\,B$, $\iota_B : B \to A\,{}_{\phi}\!\star_{\psi}\,B$ *sowie* $\iota_C : C \to A\,{}_{\phi}\!\star_{\psi}\,B$. *Falls C eine gemeinsame Unteralgebra von A und B ist, schreiben wir für das push-out der Inklusionen $C \hookrightarrow A, B$ einfach $A \star_C B$.*

Das push-out hat die folgende universelle Eigenschaft: Sei D eine C^*-Algebra und seien $\alpha : A \to D$, $\beta : B \to D$ zwei $*$-Homomorphismen mit $\alpha \circ \phi = \beta \circ \psi$. Dann existiert genau ein $*$-Homomorphismus $(\alpha \star \beta) : A\,{}_\phi\!\star_\psi B \to D$ mit $(\alpha \star \beta) \circ \iota_A = \alpha$ und $(\alpha \star \beta) \circ \iota_B = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\iota_A"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] & & \\
C \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & A\,{}_\phi\!\star_\psi B \arrow[r, dashed, "\alpha\star\beta"] & D. \\
 & B \arrow[ur, "\iota_B"'] \arrow[urr, bend right, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nun zur Beschreibung von C^*-Algebren mittels Erzeuger und Relationen:

2.1.2.4 Definition. *Sei Λ eine Indexmenge und bezeichne $\mathbb{C}\{x_\lambda, x_\lambda^* | \lambda \in \Lambda\}$ die freie komplexe Algebra mit Erzeugern x_λ, x_λ^* $(\lambda \in \Lambda)$.*

Eine C^*-Algebra A heißt universelle C^*-Algebra mit Elementen a_λ $(\lambda \in \Lambda)$ und Relationen $P_\iota \in \mathbb{C}\{x_\lambda, x_\lambda^* | \lambda \in \Lambda\}$ $(\iota \in I)$, *falls*

- *in A für alle $\iota \in I$ die Gleichung $P_\iota(a_\lambda | \lambda \in \Lambda) = 0$ gilt,*[1]
- *und zu jeder anderen C^*-Algebra B mit Elementen b_λ $(\lambda \in \Lambda)$, die gleichfalls die entsprechenden Relationen $P_\iota(b_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ erfüllen, genau ein $*$-Homomorphismus $A \to B$ mit $a_\lambda \mapsto b_\lambda$ existiert.*

Sinngemäß wird die Sprechweise universelle C^*-Algebra mit positiven/selbstadjungierten/... Erzeugern *verwendet.*

Die Frage der Eindeutigkeit universeller C^*-Algebren wird durch abstrakten Nonsens positiv beantwortet. Die Existenz hingegen ist nicht immer gesichert. Wir werden sie stets nur in folgenden Fällen benötigen (und nur für den ersten Fall beweisen):

- alle Erzeuger sind Projektionen,
- alle Erzeuger sind unitär,
- es liegen nur endlich viele Erzeuger vor, diese sind positiv, und ihre Summe ist 1.

2.1.2.5 Lemma. *Seien Λ und I Indexmengen und $P_\iota \in \mathbb{C}\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ $(\iota \in I)$. Dann existiert stets eine universelle C^*-Algebra mit Projektionen x_λ $(\lambda \in \Lambda)$, und Relationen P_ι $(\iota \in I)$.*

[1] Mit der Bezeichnung ist natürlich gemeint: für den durch $x_\lambda \mapsto a_\lambda$, $x_\lambda^* \mapsto a_\lambda^*$ definierten Homomorphismus gilt $P_\iota \mapsto 0$.

Beweis: Setze

$$B := \mathbb{C}\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\} / \big(P_\iota,\, x_\lambda - x_\lambda^2 \mid \iota \in I,\, \lambda \in \Lambda\big),$$

und definiere $* : B \to B$ als konjugiert-lineare Abbildung durch

$$[a_1 \cdot \ldots \cdot a_n] \mapsto [a_n \cdot \ldots \cdot a_1], \quad a_i \in \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Dann existiert die einhüllende C^*-Algebra von B, weil die Restklassen $[x_\lambda]$ die Algebra B erzeugen, und für jede $*$-Darstellung $\rho : B \to B(H)$ und jedes λ der Operator $\rho([x_\lambda])$ eine Projektion ist und folglich Norm kleiner gleich 1 hat. Diese einhüllende C^*-Algebra hat die gewünschte universelle Eigenschaft. □

2.1.3 Irreduzible Darstellungen von C^*-Algebren

Eine Technik, um konkrete Bilder von abstrakt definierten C^*-Algebren zu gewinnen, d.h. sie beispielsweise als matrixwertige Funktionenalgebren darzustellen, besteht darin, ihre irreduziblen Darstellungen zu bestimmen. Wir fassen die erforderlichen Hilfsmittel zusammen und wenden sie dann an einem Beispiel an, das in Kapitel 3 noch von Interesse sein wird.

2.1.3.1 Definition. *Eine* Darstellung einer C^*-Algebra A auf einem Hilbertraum H *ist ein $*$-Homomorphismus $\rho : A \to B(H)$. Sie heißt* irreduzibel, *falls es keinen nichttrivialen Unterraum $H' \subset H$ gibt, der unter $\rho(A)$ invariant ist im Sinne von $\rho(A)H' \subset H'$.*

2.1.3.2 Satz. *Eine Darstellung $\rho : A \to B(H)$ einer C^*-Algebra A ist irreduzibel genau dann, wenn nur skalare Operatoren mit $\rho(A)$ kommutieren, d.h. $\{T \in B(H) \mid \forall a \in A : [T, \rho(a)] = 0\} = \mathbb{C}1$ gilt.*

Insbesondere wirkt in einer irreduziblen Darstellung jedes zentrale Element von A skalar. □

Den folgenden Satz benötigen wir später häufig, um die Injektivität von diversen $*$-Homomorphismen zu zeigen:

2.1.3.3 Satz. *Sei A eine C^*-Algebra. Dann trennt die Menge ihrer irreduziblen Darstellungen ihre Punkte: für jedes Element $a \in A$ existiert eine irreduzible Darstellung $\rho : A \to B(H)$ mit $\rho(a) = \|a\|$.* □

Das folgende Lemma – zusammen mit der Tatsache, daß das Bild einer C^*-Algebra unter einem $*$-Homomorphismus stets abgeschlossen ist – werden wir später häufig anwenden, um die Surjektivität diverser $*$-Homomorphismen auf den Satz von Stone-Weierstraß zurückzuführen:

2.1.3.4 Lemma. *Sei A eine C^*-Algebra. Dann ist die Unteralgebra endlicher Linearkombinationen $\sum_i a_i f_i$ von Elementen $a_i \in A$ und Funktionen $f_i \in C(0,1)$ dicht in SA.* □

Das nachfolgende Lemma ist aus [2] übernommen und wird in Kapitel 3 benötigt:

2.1.3.5 Lemma. *i) Bezeichne $C^*(p,q)$ die universelle unitale C^*-Algebra zweier Projektionen p und q. Dann definiert die Zuordnung $(1,0) \star 1 \mapsto p,\ 1 \star (0,1) \mapsto q$ einen Isomorphismus $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \to C^*(p,q)$.*

ii) Die Vorschrift

$$p \mapsto \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}, \quad q \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad \mathit{mit} \quad \begin{matrix} c(t) = \cos(\pi t/2), \\ s(t) = \sin(\pi t/2), \end{matrix} \quad t \in [0,1],$$

definiert einen Isomorphismus $C^*(p,q) \xrightarrow{\sim} S(M_2(\mathbb{C}); \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ (vgl. Definition 2.1.2.1), wobei $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow M_2(\mathbb{C})$ via $(a,b) \mapsto \mathrm{diag}(a,b)$.

Beweis: i) Folgt einfach aus den universellen Eigenschaften der Algebren.

ii) Existenz und Surjektivität des angegebenen $*$-Homomorphismus folgen aus der universellen Eigenschaft von $C^*(p,q)$ und einem leichten Stone-Weierstraß-Argument. Injektivität folgt daraus, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : C^*(p,q) \to B(H)$ über den Homomorphismus faktorisiert:
Eine einfache Rechnung zeigt, daß das Element $(p-q)^2 = p+q-pq-qp$ in $C^*(p,q)$ zentral ist. Folglich ist $\rho((p-q)^2) = t$ skalar. Bezüglich der Zerlegung $H = \rho(q)H \oplus \rho(1-q)H$ hat $\rho(p)$ die Form

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix},$$

und folglich hat $\rho(p-q)^2 = \rho(p+q-pq-qp)$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & 0 \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Somit sind A und D skalar (und reell), und aus $A = A^2 + BB^*$ sowie $B^*B + D^2 = D$ folgt, daß B skalares Vielfaches eines unitären Elementes ist. Da die Darstellung irreduzibel ist, muß B auch skalar sein. Man sieht nun leicht, daß ein $t \in [0,1]$ mit $A = c^2(t), D = s^2(t)$ und $B = c(t)s(t)$ existiert. □

2.2 K-Theorie von C^*-Algebren

In diesem Abschnitt werden die K-Gruppen $K_*(A)$ einer C^*-Algebra A definiert und die wichtigsten Eigenschaften der Zuordnung $A \mapsto K_*(A)$ zusammengefaßt. So, wie Kohomologietheorien in der algebraischen Topologie auf die Klassifikation topologischer Räume bis auf Homotopie abzielen, sind auch die K-Gruppen für C^*-Algebren wesentliche Homotopie-Invarianten. Das wichtigste Mittel, um K-Gruppen auszurechnen, sind *exakte Sequenzen* (eine Folge $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C$ abelscher Gruppen heißt *exakt*, wenn $\ker \pi = \operatorname{im} \iota$ gilt).

2.2.0.6 Definition. *Seien A und B zwei C^*-Algebren. Zwei $*$-Homomorphismen $\phi, \psi : A \to B$ heißen* homotop*, geschrieben $\phi \sim_h \psi$, falls es einen Pfad von $*$-Homomorphismen $\phi_t : A \to B, t \in [0,1]$, mit $\phi_0 = \phi$ und $\phi_1 = \psi$ gibt, so daß für alle $a \in A$ die Abbildung $[0,1] \to A$, $t \mapsto \phi_t(a)$, stetig ist.*
Die Algebren A und B heißen homotopie-äquivalent*, geschrieben $A \sim_h B$, falls es zwei Homomorphismen $\phi : A \to B$ und $\psi : B \to A$ gibt, so daß $\phi \circ \psi \sim_h id_B$ und $\psi \circ \phi \sim_h id_A$.*

Wie in der Einleitung gesagt, ist $K_0(A)$ für eine C^*-Algebra A definiert als die universelle Gruppe, die von den endlich erzeugten projektiven Modulen über A mit der direkten Summe als Halbgruppenoperation erzeugt wird. Es erweist sich als hilfreich, dies mittels Projektionen in Matrixalgebren über A umzuformulieren. Dazu benutzt man die Tatsache, daß jeder endlich erzeugte projektive Modul als direkter Summand in einen Standardmodul der Form A^n eingebettet werden kann und isomorph zu einem Modul der Form pA^n mit einer Projektion $p \in M_n(A)$ ist.

Zunächst muß der Begriff des Isomorphismus für Module in die Sprache der Projektionen übersetzt werden. Dies leistet die Murray-von-Neumann-Äquivalenz (für B habe man dabei $M_n(A)$ im Auge). Die anderen Äquivalenzbegriffe sind technisch hilfreich.

2.2.0.7 Definition. *Zwei Projektionen p und q einer C^*-Algebra B heißen*

- (Murray-von Neumann-) äquivalent*, geschrieben $p \sim q$, falls $p = v^*v$ und $q = vv^*$ für eine partielle Isometrie $v \in B$;*
- unitär äquivalent*, geschrieben $p \sim_u q$, falls $p = u^*qu$ für ein unitäres Element $u \in B$;*
- homotop*, geschrieben $p \sim_h q$, falls p und q durch einen normstetigen Pfad von Projektionen in B verbunden sind.*

Der folgende Satz zeigt, daß die verschiedenen Äquivalenzbegriffe zusammenfallen, wenn man statt $B = M_n(A)$ alle Matrixalgebren $M_k(A), k \in \mathbb{N}$, gleichzeitig betrachtet:

2.2.0.8 Satz. *Seien p und q Projektionen in einer C^*-Algebra B. Dann gilt*

$$p \sim_h q \quad \Rightarrow \quad p \sim_u q \quad \Rightarrow \quad p \sim q$$

und

$$p \sim q \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} p & \\ & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & \\ & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{sowie} \qquad p \sim_u q \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} p & \\ & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

□

So, wie man in der algebraischen Topologie die K-Gruppen zuerst für kompakte Räume definiert und dann für lokalkompakte Räume deren Einpunktkompaktifizierung verwendet, definiert man die K-Gruppen zuerst für unitale C^*-Algebren, und anschließend für nicht-unitale, indem man zu deren Unitalisierung übergeht:

2.2.0.9 Definition.

- *Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $M_\infty(A) := \bigcup_n M_n(A)/_\equiv$ die Menge der Matrizen beliebiger Größe über A mit der Identifikation $a \equiv \operatorname{diag}(a, 0), a \in M_n(A)$. Bezeichne $V(A)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Projektionen in $M_\infty(A)$ bezüglich der von $\sim$ induzierten Relation. Die Gruppe $K_0^+(A)$ ist die universelle Gruppe der Halbgruppe $V(A)$ bezüglich der Operation $[a] \oplus [b] := \begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix}$.*

- *Sei $\phi : A \to B$ ein $*$-Homomorphismus unitaler C^*-Algebren. Dann induziert ϕ vermöge der Abbildungen $M_n(\phi) : M_n(A) \to M_n(B), (a_{ij})_{ij} \mapsto (\phi(a_{ij}))_{ij}$, eine Abbildung $M_\infty(A) \to M_\infty(B)$ und einen Homomorphismus $V(A) \to V(B)$ von Halbgruppen (leicht nachzuprüfen), und somit einen Homomorphismus $\phi_* : K_0^+(A) \to K_0^+(B)$.*

- *Sei A eine beliebige C^*-Algebra und $A^\sim$ ihre Unitalisierung. Bezeichne $\epsilon : A^\sim \to \mathbb{C}$ die Projektion $(a, \lambda) \mapsto \lambda$. Dann ist $K_0(A)$ definiert als der Kern der Abbildung $\epsilon_* : K_0^+(A^\sim) \to K_0^+(\mathbb{C})$.*

- *Sei $\phi : A \to B$ ein $*$-Homomorphismus, und $\phi^\sim : A^\sim \to B^\sim$ seine Unitalisierung $(a, \lambda) \mapsto (\phi(a), \lambda)$. Definiere $\phi_* : K_0(A) \to K_0(B)$ als die Einschränkung von $\phi_*^\sim : K_0^+(A^\sim) \to K_0^+(B^\sim)$ auf $K_0(A)$ (man prüft leicht nach, daß dies wirklich wohldefiniert ist).*

Folgende Eigenschaften der obigen Konstruktion sind grundlegend und leicht bzw. nicht sehr schwer zu zeigen:

2.2.0.10 Satz.

- (Homotopie-Invarianz) *Seien $\phi, \psi : A \to B$ zwei $*$-Homomorphismen von C^*-Algebren. Dann folgt aus $\phi \sim_h \psi$ die Gleichheit $\phi_* = \psi_*$.*
- (Halbexaktheit) *Sei $0 \to I \to A \to B \to 0$ eine exakte Sequenz von C^*-Algebren. Dann ist die induzierte Sequenz*

$$K_0(I) \to K_0(A) \to K_0(B) \tag{2.2}$$

exakt (in der Mitte).

- ("einfache" Stabilität) *Für jede C^*-Algebra A und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $K_0(M_n(A))$ natürlich isomorph zu $K_0(A)$.*
- (Additivität) *Seien A und B zwei C^*-Algebren. Dann induzieren die Projektionen $\pi_A : A \oplus B \to A$ und $\pi_B : A \oplus B \to B$ einen Isomorphismus $K_0(A \oplus B) \xrightarrow{\pi_{A*} \oplus \pi_{B*}} K_0(A) \oplus K_0(B)$.* □

Um etwas über die rechte Seite (und nicht nur die Mitte) der exakten Sequenz (2.2) aussagen zu können, überträgt man eine Technik (basierend auf der *Puppe-Sequenz*) zur Konstruktion von Kohomologietheorien aus der algebraischen Topologie:

2.2.0.11 Definition. *Für eine C^*-Algebra A und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te K-Gruppe $K_n(A)$ definiert als $K_n(A) := K_0(S^n A)$, wobei $S^n A$ die n-te Einhängung $S(S(\cdots S(A) \cdots))$ bezeichnet.*
Jeder $*$-Homomorphismus $\phi : A \to B$ induziert kanonisch einen $*$-Homomorphismus $S^n A \to S^n B$, und somit einen Homomorphismus $\phi_* : K_n(A) \to K_n(B)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Man sieht leicht, daß sich die Eigenschaften von K_0 aus Satz 2.2.0.10 auf alle K_n, $n \in \mathbb{N}$, übertragen.

Die Umformulierung der Puppe-Sequenz aus der algebraischen Topologie liefert nun:

2.2.0.12 Lemma. *Sei $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\phi} B \to 0$ eine exakte Folge von C^*-Algebren. Dann existiert eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} K_1(I) \xrightarrow{\iota_*} K_1(A) \xrightarrow{\phi_*} K_1(B) \xrightarrow{\partial} K_0(I) \xrightarrow{\iota_*} K_0(A) \xrightarrow{\phi_*} K_0(B).$$

Dabei sind die Abbildungen $\partial : K_{n+1}(B) \to K_n(I)$ natürlich in folgendem Sinne: Ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I' \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

eine exakte Leiter von C^*-Algebren (d.h. das Diagramm kommutiert, und die Zeilen sind exakt), so kommutiert das induzierte Quadrat

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1}(B) & \xrightarrow{\partial} & K_n(I) \\ \beta_* \downarrow & & \downarrow \gamma_* \\ K_{n+1}(B') & \xrightarrow{\partial} & K_n(I') \end{array}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Fundamental (u.a. weil er eine Aussage über die rechte Seite der Sequenz (2.2) macht, und somit konkrete Berechnungen erleichtert bzw. überhaupt ermöglicht) ist:

2.2.0.13 Theorem (Bott's Periodizitäts-Satz). *Es existiert eine natürlicher Isomorphismus $K_{*+2} \cong K_*$, d.h. für jede C^*-Algebra A und jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Isomorphismus $\beta_A^n : K_{n+2}(A) \xrightarrow{\sim} K_n(A)$ derart, daß für jeden $*$-Homomorphismus $\phi : A \to B$ die "Natürlichkeitsbedingung" $\beta_B \circ \phi_* = \phi_* \circ \beta_A$ erfüllt ist.* □

Es existiert noch ein anderes Bild von K_1: Sei A eine C^*-Algebra. Bezeichne $U_n(A)$ die Gruppe der unitären Elemente $u \in M_n(A^\sim)$ mit $u \equiv 1_n \mod M_n(A)$, und $U_n^0(A) \subset U_n(A)$ die Zusammenhangskomponente der 1. Die durch $u \mapsto \mathrm{diag}(u, 1)$ definierten Einbettungen $U_n(A) \hookrightarrow U_{n+1}(A)$ induzieren Homomorphismen $U_n(A)/U_n^0(A) \to U_{n+1}(A)/U_{n+1}^0(A)$, $n \in \mathbb{N}$, und es gilt:

2.2.0.14 Satz. *Die Gruppe $K_1(A)$ ist natürlich isomorph zu dem direkten Limes der Gruppen $U_n(A)/U_n^0(A)$ über n.* □

Aus der langen exakten Sequenz von Lemma 2.2.0.12 erhält man mit Theorem 2.2.0.13 und dem obigen Bild von K_1:

2.2.0.15 Satz. *Sei $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\phi} B \to 0$ eine exakte Folge von C^*-Algebren. Dann existiert eine exakte 6-Term-Folge*

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0(B) \\ \partial \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ K_1(B) & \xleftarrow[\phi_*]{} & K_1(A) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_1(I). \end{array}$$

Bezeichne e_n die 1 in $M_n(\mathbb{C})$ bzw. deren Bild in $M_k(\mathbb{C})$ unter den kanonischen Einbettungen für $k \geq n$.
Die Abbildung $\delta : K_0(B) \to K_1(I)$ ist gegeben durch $\delta([p] - [e_n]) = [\exp(2\pi i x)]$, wobei $p \in M_\infty(B^\sim)$ eine Projektion mit $p \equiv e_n \mod M_\infty(B)$

und x ein beliebiger Lift von p nach $M_\infty(A^\sim)$ ist.
Die Abbildung $\partial : K_1(B) \to K_0(I)$ ist gegeben durch $\partial([u]) = [we_n w^{-1}] - [e_n]$, wobei $u \in U_n(B)$ und w ein Lift von $\mathrm{diag}(u, u^{-1})$ nach $U_{2n}(A)$ ist.

Die Sequenz ist natürlich im gleichen Sinn wie in Lemma 2.2.0.12. □

Leicht zu sehen ist

2.2.0.16 Korollar. *Sei $0 \to I \to A \xrightarrow{\phi} B \to 0$ eine exakte Folge von C^*-Algebren, die* spaltet, *d.h. es existiert ein $*$-Homomorphismus $\psi : B \to A$ mit $\phi \circ \psi = id_B$. Dann sind in der zugehörigen 6-Term-Folge von K-Gruppen die Abbildungen δ und ∂ beide 0.* □

In Kapitel 3 werden die meisten Beispiele auf Algebren der Form $S(B; C^0, C^1)$ führen. Zur Berechnung der K-Gruppen dieser Algebren kann man aus dem obigen Satz folgende *Mayer-Vietoris-Sequenz* (2.3) ableiten:

2.2.0.17 Satz. *Sei B eine C^*-Algebra mit C^*-Unteralgebren C^0 und C^1, und sei $E = S(B; C^0, C^1)$. Die Auswertung $ev : E \to C^0 \oplus C^1$ an den Randpunkten 0 und 1 des Intervalles $[0,1]$ liefert eine exakte Sequenz*

$$0 \to SB \to E \xrightarrow{ev} C^0 \oplus C^1 \to 0,$$

und diese liefert eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
K_1(B) \arrow[r] & K_0(E) \arrow[r, "ev_*"] & K_0(C^0) \oplus K_0(C^1) \arrow[d, "i_{1*} - i_{0*}"] \\
K_1(C^0) \oplus K_1(C^1) \arrow[u, "i_{1*} - i_{0*}"] & K_1(E) \arrow[l, "ev_*"'] & K_0(B), \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

wobei $i_j : C^j \to B$ die Inklusion bezeichnet. Die Sequenz ist wieder natürlich in gleichem Sinne wie in Lemma 2.2.0.12. □

Als erstes Beispiel notieren wir die K-Gruppen von $\mathbb{C}$: Die endlich erzeugten projektiven Moduln über $\mathbb{C}$ – komplexe endlichdimensionale Vektorräume – werden bereits durch ihre Dimension klassifiziert. Zweitens kann man induktiv leicht zeigen, daß die Gruppen $U_n(\mathbb{C})$ für alle n wegzusammenhängend ist. Daraus folgt

2.2.0.18 Satz. *$K_0(\mathbb{C}) = [1]\mathbb{Z}$ und $K_1(\mathbb{C}) = 0$.* □

Als Beispiel berechnen wir $K_*(C(S^1))$: Die Auswertung an einem Punkt induziert eine exakte Sequenz $0 \to S\mathbb{C} \to C(S^1) \to \mathbb{C} \to 0$, die offensichtlich spaltet, und somit liefert die 6-Term-Folge wegen $K_0(S\mathbb{C}) = K_1(\mathbb{C}) = 0$ und $K_0(\mathbb{C}) \cong K_1(S\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ das Ergebnis $K_0(C(S^1)) \cong K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$.

Die folgende Vermutung von Joachim Cuntz und E. Germain wurde unter Annahme der untenstehenden Voraussetzungen i) und ii) von Klaus Thomsen bewiesen (s. [9]).

2.2.0.19 Vermutung. *Sei C eine gemeinsame C^*-Unteralgebra zweier C^*-Algebren A und B. Dann existiert eine exakte Sequenz*

$$\begin{tikzcd} K_0(C) \arrow[r] & K_0(A) \oplus K_0(B) \arrow[r] & K_0(A \star_C B) \arrow[d] \\ K_1(A \star_C B) \arrow[u] & K_1(A) \oplus K_1(B) \arrow[l] & K_1(C), \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

wobei die waagerechten Abbildungen von den Inklusionen induziert sind.

2.2.0.20 Theorem. *In der obigen Situation gelte*

i) es existieren bedingte Erwartungen $A \to C$ und $B \to C$;

ii) C ist endlichdimensional.

Dann existiert die exakte Sequenz wie oben vermutet.

Jeder $*$-Homomorphismus $\phi : A \to C$ mit $\phi|_C = \mathrm{id}_C$ ist eine bedingte Erwartung, und in allen unseren Anwendungsfällen wird solch ein $*$-Homomorphismus existieren.

2.3 Diskrete Gruppen und C^*-Algebren

Dieser Abschnitt faßt die Grundlagen für die spätere Betrachtung von Gruppenoperationen in Kapitel 3 zusammen.
Im folgenden sei G stets eine diskrete Gruppe.

2.3.1 Verschränkte Produkte für diskrete Gruppen

2.3.1.1 Definition.

- *Eine* unitäre Darstellung π *von G ist ein Homomorphismus von G in die Gruppe der unitären Operatoren auf einem Hilbertraum H. Die Darstellung heißt* irreduzibel*, falls $\pi(G)$ mit keiner nichttrivialen Projektion kommutiert.*

- *Die* C^*-Gruppenalgebra $C^*(G)$ *von G ist die einhüllende C^*-Algebra der (algebraischen) Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$, die definiert ist als der* *komplexe Vektorraum mit Basis G, versehen mit dem Produkt*

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\cdot\left(\sum_{g'\in G}\mu_{g'}g'\right) := \sum_{h\in G}\left(\sum_{\substack{g,g'\in G\\ gg'=h}}\lambda_g\mu_{g'}\right)h$$

und der Involution

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)^* := \sum_{g\in G}\bar{\lambda}_g g^{-1}.$$

- *Ein* C^*-dynamisches System (A, G, α) *ist eine* C^**-Algebra* A *mit einer Gruppe* G *und einem Homomorphismus* α *von* G *in die Automorphismengruppe* $Aut(A)$ *von* A.

- *Eine* kovariante Darstellung (ρ, π) *des dynamischen Systems besteht aus einer Darstellung* ρ *von* A *und einer unitären Darstellung* π *von* G *auf demselben Hilbertraum* H*, welche die Bedingung*

  $$\pi(g)\rho(a) = \rho(\alpha_g(a))\pi(g), \quad a \in A, g \in G$$

  erfüllen.

- *Sei* (A, G, α) *ein* C^**-dynamisches System. Bezeichne* $C_c(G, A)$ *den Vektorraum der* A*-wertigen Funktionen auf* G *mit endlichem Träger. Wir schreiben die Elemente dieses Raumes als formale Summen* $\sum_{g\in G} a_g g, \quad a_g \in A$*, und versehen ihn mit der Multiplikation*

  $$\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g'\in G}b_{g'}g'\right) = \sum_{h\in G}\left(\sum_{\substack{g,g'\in G\\ gg'=h}}a_g\alpha_g(b_{g'})\right)h$$

  und einer Involution

  $$\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)^* = \sum_{g\in G}g^{-1}a_g^* = \sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)g^{-1}.$$

  Das verschränkte Produkt $A \rtimes_\alpha G$ von A und G bezüglich α *ist die einhüllende* C^**-Algebra von* $C_c(G, A)$.

- *Seien* (A, G, α) *und* (B, G, β) *zwei dynamische Systeme. Ein* $*$*-Homomorphismus* $\psi : A \to B$ *heißt* äquivariant (bezüglich α und β)*, falls* $\beta_g \circ \psi = \psi \circ \alpha_g$ *für alle* $g \in G$ *gilt. In diesem Fall induziert* ψ *einen* $*$*-Homomorphismus* $\psi \rtimes G : A \rtimes_\alpha G \to B \rtimes_\beta G$ *durch* $\sum a_g g \mapsto \sum \psi(a_g)g$.

Bemerkung. Man sieht leicht, daß für jede Darstellung $\phi : C_c(G, A) \to B(H)$ die Abschätzung

$$\left\| \phi \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \right\| \leq \sum_{g \in G} \|\phi(a_g g)\| \quad \leq \quad \sum_{g \in G} \|a_g\|_A$$

gilt und somit die einhüllende C^*-Algebra wirklich existiert.

2.3.1.2 Lemma. *Sei (A, G, α) ein dynamisches System.*

- *A ist natürlich in $A \rtimes_\alpha G$ als Unteralgebra enthalten. Falls A unital ist, so ist G natürlich in der Gruppe der unitären Elemente von $A \rtimes_\alpha G$ enthalten.*
- *Eine kovariante Darstellung (ρ, π) des Systems definiert eine Darstellung*

$$\rho \rtimes \pi \quad : \quad \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \mapsto \left(\sum_{g \in G} \rho(a_g) \pi(g) \right)$$

des verschränkten Produktes $A \rtimes_\alpha G$.

- *Ist A unital, so definieren die Zuordnungen $(\rho, \pi) \mapsto \rho \rtimes \pi$ und $\phi \mapsto (\phi|_A, \phi|_G)$ eine Äquivalenz der Kategorien der Darstellungen des verschränkten Produktes und des dynamischen Systems.*

Wir notieren noch die Verträglichkeit von verschränkten Produkten mit pull-backs und push-outs:

2.3.1.3 Lemma. *Seien $(A, G, \alpha), (B, G, \beta)$ und (C, G, γ) drei dynamische Systeme mit derselben endlichen Gruppe G.*

- *Seien $\phi : A \to C$ und $\psi : B \to C$ äquivariante $*$-Homomorphismen. Dann definiert die Vorschrift $g \cdot (a, b) := (\alpha_g(a), \beta_g(b))$ eine Gruppenoperation $\alpha \vee \beta$ von G auf dem pull-back $A\,{}_\phi\!\vee_\psi B$. Die Strukturabbildungen $A \vee B \to A, B$ sind bezüglich der jeweiligen G-Operationen äquivariant, und die Vorschrift $\sum_g (a_g, b_g) g \mapsto \left(\sum_g a_g g, \ \sum_{g'} b_{g'} g' \right)$ definiert einen Isomorphismus*

$$\left(A\,{}_\phi\!\vee_\psi B\right) \rtimes_{(\alpha \vee \beta)} G \xrightarrow{\sim} \left(A \rtimes_\alpha G\right) \underset{(\psi \rtimes G)}{{}_{(\phi \rtimes G)}\bigvee} \left(B \rtimes_\beta G\right).$$

- *Sei C eine gemeinsame Unteralgebra von A und B, und γ die Einschränkung von α und β auf C, d.h. $\alpha_g|_C = \gamma_g = \beta_g|_C$ für alle $g \in G$. Dann induzieren die Operationen α und β eine Wirkung $\alpha \star \beta$ von G auf $A \star_C B$, bezüglich derer die Strukturabbildungen $\iota_A, \iota_B : A, B \to A \star_C B$ äquivariant sind, und die Abbildungen $\iota_A \rtimes G, \iota_B \rtimes G : A \rtimes_\alpha G, B \rtimes_\beta G \to (A \star_C B) \rtimes_{(\alpha\star\beta)} G$ induzieren einen Isomorphismus $(\iota_A \rtimes G) \star (\iota_B \rtimes G)$:*

$$\big(A \rtimes_\alpha G\big) \star_{(C \rtimes_\gamma G)} \big(B \rtimes_\beta G\big) \xrightarrow{\sim} \big(A \star_C B\big) \rtimes_{(\alpha\star\beta)} G.$$

□

2.3.2 Verschränkte Produkte mit $\mathbb{Z}_n$

Sei A eine C^*-Algebra. Ein Automorphismus $\alpha \in Aut(A)$ endlicher Ordnung n (d. h. $\alpha^n = id_A$) definiert eine Operation von $\mathbb{Z}_n$ auf A, die wir wieder mit α bezeichnen. Für spätere Untersuchungen wollen wir das verschränkte Produkt $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n$ als Matrixalgebra darstellen. Dazu übertragen wir eine in [6] für den Fall $n = 2$ beschriebene Technik.

2.3.2.1 Definition. *Sei G eine diskrete Gruppe und A eine C^*-Algebra mit einer Wirkung $\alpha : G \to Aut(A)$. Die* duale Wirkung *der dualen Gruppe $\hat{G}$ von G auf dem verschränkten Produkt $A \rtimes_\alpha G$ ist definiert durch*

$$\hat{\alpha}_\chi \; : \; \left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \mapsto \left(\sum_{g\in G} \chi(g) a_g g\right), \quad \chi \in \hat{G}.$$

In der oben geschilderten Situation wird die duale Wirkung von $\hat{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_n$ auf dem verschränkten Produkt $A \rtimes_\alpha G$ induziert von dem Automorphismus

$$\hat{\alpha} : A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n \to A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n, \quad \left(\sum_r a_r \sigma^r\right) \mapsto \left(\sum_r \xi^r a_r \sigma^r\right),$$

wobei $\sigma \in \mathbb{Z}_n$ den kanonischen Erzeuger und $\xi = exp(2\pi i/n)$ die n-te Einheitswurzel bezeichnet.

Vor dem wesentlichen Lemma einige Bezeichnungen:
Als Vektorraum ist A die direkte Summe der Eigenräume A_j von α zum Eigenwert ξ^j, $j = 0, \dots, n-1$ (s. [7]). Bezeichne $P_j : A \to A_j$ die Projektion auf A_j bezüglich der Zerlegung $A = \oplus_j A_j$.
Die Projektion $\hat{P}_j$ von $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n$ auf den Eigenraum der dualen Wirkung $\hat{\alpha}$ zum Eigenwert ξ^j hat offenbar die Form $\sum_r a_r \sigma^r \mapsto a_j \sigma^j$.
Bezeichne $S : A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n \to A$ die durch $\sum_r a_r \sigma^r \mapsto \sum_r a_r$ definierte lineare Abbildung, und setze $Q_j := P_j S$ sowie $\hat{Q}_j = S\hat{P}_j$.

2.3.2.2 Lemma. *(In diesem Lemma und dessen Beweis starten alle Matrix-Indizes mit 0.) Die Vorschriften*

$$\phi : b \mapsto \left(\alpha^i \hat{Q}_{j-i}(b)\right)_{i,j}, \quad \psi : b \mapsto \left(Q_{j-i}\hat{\alpha}^{-j}(b)\right)_{i,j}, \quad b \in A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n \tag{2.5}$$

definieren Einbettungen $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n \hookrightarrow M_n(A)$, die durch eine unitäre $n \times n$-Matrix aus $M_n(\mathbb{C})$ konjugiert sind. Das Bild $\psi(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n)$ ist die Unteralgebra $(A_{j-i})_{i,j} \subset M_n(A)$.

Beweis: ϕ ist ein Homomorphismus: Für $b = \sum_r b_r \sigma^r$ und $c = \sum_s c_s \sigma^s$ ist

$$(\phi(b)\phi(c))_{i,j} = \sum_k \alpha^i \left(\hat{Q}_{k-i}(b)\right) \alpha^k \left(\hat{Q}_{j-k}(c)\right) = \sum_k \alpha^i \left(b_{k-i}\alpha^{k-i}(c_{j-k})\right)$$

und

$$\phi(bc)_{i,j} = \alpha^i \hat{Q}_{j-i}(bc) = \alpha^i \hat{Q}_{j-i}\left(\sum_{r,s} b_r \alpha^r(c_s)\sigma^{r+s}\right) = \alpha^i \left(\sum_k b_{k-i}\alpha^{k-i}(c_{j-k})\right).$$

Die Verträglichkeit mit der Involution folgt mit $b^* = \sum_r \alpha^r(b^*_{-r})\sigma^r$ aus

$$\left(\phi(b)^*\right)_{j,i} = \alpha^j(\hat{Q}_{i-j}(b))^* = \alpha^j(b^*_{i-j}) = \alpha^i(\alpha^{j-i}(b^*_{i-j})) = \left(\phi(b^*)\right)_{i,j}.$$

Die Abbildungen ϕ und ψ sind konjugiert via $U = \left(\xi^{ij}\right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$, $\xi = \exp(2\pi i/n)$: Sei $b_r = \sum_k b_r^k$ die Zerlegung in Eigenvektoren $b_r^k \in A_k$. Dann ist

$$\begin{aligned}(U\phi(b)U^*)_{i,j} &= \sum_{k,l} \xi^{ik}\alpha^k \left(\hat{Q}_{l-k}(b)\right) \xi^{-lj} = \sum_{k,l,\mu} \xi^{ik-lj}\alpha^k(b^\mu_{l-k}) = \sum_{k,l,\mu} \xi^{ik-lj}\xi^{\mu k} b^\mu_{l-k} \\ &= \sum_{k,l',\mu} \xi^{(i+\mu)k-kj}\xi^{-l'j} b^\mu_{l'} = \sum_{l',\mu} \delta_{\mu,j-i}\xi^{-l'j} b^\mu_{l'} = Q_{j-i}\hat{\alpha}^{-j}(b) = \psi(b)_{i,j}.\end{aligned}$$

Ein Blick auf die jeweils erste Zeile oder Spalte in (2.5) zeigt, daß ϕ und ψ injektiv sind. Ebenfalls offensichtlich ist die Inklusion im $\psi \subset (A_{j-i})_{i,j}$. Gleichheit folgt leicht aus der Surjektivität der Fouriertransformation $A^n \to A^n$, die definiert ist durch

$$(b_0, \ldots, b_{n-1}) \quad \mapsto \quad \left(\sum_m b_m \xi^{mj}\right)_{j=0,..,n-1} = \left(S\hat{\alpha}^j(b)\right)_{j=0,..,n-1}.$$

□

Der folgende Satz ist ein Spezialfall des Dualitätssatzes von Takesaki-Takai ([8]). Er soll hier nur die Nützlichkeit des Lemmas 2.3.2.2 illustrieren:

2.3.2.3 Satz. *Es gilt* $(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{\mathbb{Z}_n} \cong M_n(A)$.

Beweis: Wir wenden die Einbettung ψ aus dem vorigen Lemma auf $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n$ mit der $\hat{\mathbb{Z}_n}$-Wirkung $\hat{\alpha}$ an. Der Eigenraum von $\hat{\alpha}$ zum Eigenwert ξ^j ist offensichtlich $A\sigma^j \subset A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n$. Somit liefert ψ einen Isomorphismus $(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\sim} (A\sigma^{j-i})_{i,j} \subset M_n(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n)$. Die Abbildung

$$M_n(A) \to (A\sigma^{j-i})_{i,j}, \quad (b_{i,j})_{i,j} \ \mapsto \ \left(\alpha^{-i}(b_{i,j})\sigma^{j-i}\right)_{i,j},$$

ist offensichtlich eine Bijektion, und wegen

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\alpha^{-i}(b_{i,k})\sigma^{k-i}\right)\left(\alpha^{-k}(c_{k,j})\sigma^{j-k}\right) &= \sum_k \alpha^{-i}(b_{i,k})\alpha^{(k-i)-k}(c_{k,j})\sigma^{(k-i)+(j-k)} \\ &= \alpha^{-i}\left(\sum_k b_{i,k}c_{k,j}\right)\sigma^{j-i} \end{aligned}$$

sowie

$$\left(\alpha^{-i}(b_{i,j})\sigma^{j-i}\right)^* = \sigma^{i-j}\alpha^{-i}(b_{i,j}^*) = \alpha^{-j}(b_{i,j}^*)\sigma^{j-i}$$

ein $*$-Homomorphismus. □

2.4 Nichtkommutative simpliziale Komplexe

In diesem Abschnitt definieren wir die "geometrischen Objekte" unserer Untersuchungen – zu jedem simplizialen Komplex assoziieren wir eine (nichtkommutative) C^*-Algebra, welche die Funktionenalgebra des Komplexes als maximalen kommutativen Quotienten enthält. Diese Konstruktion wurde von Joachim Cuntz in [3] eingeführt.

2.4.0.4 Definition.
- *Ein* simplizialer Komplex Σ *ist eine endliche*[2] *nichtleere Menge von Teilmengen (den* Simplexen*) einer Menge* V_Σ *(der* Ecken*), so daß*

  $$s \in V_\Sigma \ \Rightarrow \ \{s\} \in \Sigma$$

  und

  $$F \in \Sigma,\ \emptyset \neq E \subset F \ \Rightarrow \ E \in \Sigma.$$

  Σ *heißt* n-dimensional*, falls* $|\sigma| \leq n+1$ *für alle Simplexe* $\sigma \in \Sigma$ *gilt.*

[2] Gewöhnlich läßt man zu, daß ein Komplex unendlich viele Simplexe hat, die Beschränkung auf endliche Komplexe vereinfacht aber unsere Betrachtungen.

- *Ein simplizialer Komplex Σ heißt* Flaggenkomplex, *falls er in folgendem Sinne durch seine 1-Simplexe bestimmt ist:*

$$\{s_0, \ldots, s_n\} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \{s_i, s_j\} \in \Sigma \ \text{ für alle } \ 0 \leq i < j \leq n.$$

- *Eine Abbildung zwischen simplizialen Komplexen Σ und Σ' ist eine Abbildung $f : V_\Sigma \to V_{\Sigma'}$, die der Bedingung*

$$\{s_0, \ldots s_n\} \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad \{f(s_0), \ldots, f(s_n)\} \in \Sigma'$$

genügt.

- *Die* geometrische Realisierung $|\Sigma|$ *eines simplizialen Komplexes Σ ist der Unterraum*

$$\{f : V_\Sigma \to \mathbb{R} | \textstyle\sum_{s \in V_\Sigma} f(s) = 1, \prod_{i=0}^n f(s_i) = 0 \text{ falls } \{s_0, \ldots, s_n\} \notin \Sigma\}$$

von $\mathbb{R}^{V_\Sigma}$ mit der Teilraumtopologie.

- *Die C^*-Algebra C_Σ eines simplizialen Komplexes Σ ist die universelle unitale C^*-Algebra mit positiven Erzeugern $h_s, s \in V_\Sigma$, und den Relationen*

$$\begin{aligned} h_{s_0} \cdot \ldots \cdot h_{s_n} &= 0 \quad \text{falls} \quad \{s_0, \ldots, s_n\} \notin \Sigma, \\ \sum_{s \in V_\Sigma} h_s &= 1. \end{aligned}$$

- *Die C^*-Algebra C^f_Σ eines Flaggenkomplexes Σ ist die universelle unitale C^*-Algebra mit positiven Erzeugern $h_s, s \in V_\Sigma$, und den Relationen*

$$\begin{aligned} h_s h_{s'} &= 0 \quad \text{falls} \quad \{s, s'\} \notin \Sigma, \\ \sum_{s \in V_\Sigma} h_s &= 1. \end{aligned}$$

Die Zuordnungen $\Sigma \mapsto C_\Sigma$ und $\Sigma \mapsto C^f_\Sigma$ können wie folgt zu Funktoren fortgesetzt werden:

2.4.0.5 Satz. *Eine Abbildung f zwischen simplizialen Komplexen Σ und Σ' induziert einen $*$-Homomorphismus $f^* : C_{\Sigma'} \to C_\Sigma$ gemäß*

$$h_{s'} \mapsto g_{s'} \quad \text{mit} \quad g_{s'} = \sum_{s \in f^{-1}(s')} h_s, \quad s' \in V_{\Sigma'}.$$

Falls Σ und Σ' Flaggenkomplexe sind, definiert obige Vorschrift einen $*$-Homomorphismus $C^f_{\Sigma'} \to C^f_\Sigma$.

Beweis: Wir müssen nachprüfen, daß die Elemente $g_{s'}$ die Relationen $\sum_{s'} g_{s'} = 1$ und $g_{s'_0} \cdot \ldots \cdot g_{s'_n} = 0$ für $\{s'_0, \ldots, s'_n\} \notin \Sigma'$ erfüllen. Das erste folgt aus

$$\sum_{s' \in V_{\Sigma'}} g_{s'} = \sum_{s' \in V_{\Sigma'}} \sum_{s \in f^{-1}(s')} h_s = \sum_{s \in V_\Sigma} h_s = 1.$$

Seien $s'_0, \ldots, s'_n \in V_{\Sigma'}$ mit $\{s'_0, \ldots, s'_n\} \notin \Sigma'$. Für beliebige Urbilder $s_i \in f^{-1}(s'_i)$, $i = 0, \ldots, n$, muß dann $\{s_0, \ldots, s_n\} \notin \Sigma$ gelten, und somit ist

$$g_{s'_0} \cdot \ldots \cdot g_{s'_n} = \sum_{s_0 \in f^{-1}(s'_0)} \cdots \sum_{s_n \in f^{-1}(s'_n)} h_{s_0} \cdots h_{s_n} = 0.$$

□

Sei Σ ein Flaggenkomplex. Dann ist C_Σ offensichtlich ein Quotient von C^f_Σ. Der folgende Satz unterstreicht, daß C_Σ "kommutativer" ist als C^f_Σ. Er folgt auch sofort aus dem wesentlich allgemeineren Theorem 2.7 aus [3]:

2.4.0.6 Satz. *Sei Σ ein endlicher eindimensionaler simplizialer Komplex. Dann gilt $C_\Sigma \cong C(|\Sigma|)$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für jede irreduzible Darstellung $\rho : C_\Sigma \to B(H)$ die Bildalgebra $\rho(C_\Sigma)$ kommutativ ist.

Für jedes $t \in V_\Sigma$ ist das Element $g_t := h_t - h_t^2$ zentral: Sei $r \in V_\Sigma$ beliebig. Multiplizieren wir die Relation $\sum_{s \in V_\Sigma} h_s = 1$ von links mit $h_r h_t$ bzw. von rechts mit $h_t h_r$, so erhalten wir

$$h_r h_t h_r + h_r h_t^2 = h_r h_t, \qquad h_r h_t h_r + h_t^2 h_r = h_t h_r, \qquad r, t \in V_\Sigma, r \neq t,$$

und folglich $h_r g_t = h_r h_t h_r = g_t h_r$. Somit ist $\rho(g_t)$ skalar.

Angenommen, $\rho(g_t) \neq 0$. Dann ist für zwei verschiedene Ecken $r, s \in V_\Sigma \setminus \{t\}$ das Produkt $\rho(h_r)\rho(h_s) = 0$ wegen $h_r h_s g_t = 0$ (letzteres gilt, weil Σ eindimensional ist). Multiplizieren wir also die Relation $\sum_{s \in V_\Sigma} \rho(h_s) = 1$ von rechts bzw. links mit h_r, erhalten wir

$$\rho(h_r h_t) + \rho(h_r^2) = \rho(h_r) = \rho(h_r^2) + \rho(h_t h_r),$$

und folglich kommutiert $\rho(h_r)$ mit $\rho(h_t)$.

Angenommen, $\rho(g_s) = 0$ für alle $s \in V_\Sigma$. Dann ist $\rho(h_s) =: P_s$ eine Projektion für jedes $s \in V_\Sigma$. Multiplizieren wir nun die Relation $\sum_s P_s = 1$ von links mit P_r und von rechts mit P_t, so folgt $P_r^2 P_t + P_r P_t^2 = P_r P_t$, also $P_r P_t = 0$.

Da in beiden Fällen t und r beliebig waren, kommutieren in beiden Fällen die Bilder aller Erzeuger von C_Σ. □

3 Hauptteil

Dieses Kapitel bildet den eigentlichen Inhalt der Diplomarbeit: Für Beispiele eindimensionaler simplizialer Komplexe werden die assoziierten Algebren bestimmt, deren K-Gruppen berechnet, einige $\mathbb{Z}_2$-Operationen auf den Komplexen betrachtet und einfache Verallgemeinerungen getroffen.

3.1 Ein nichtkommutativer Kreis

Als erstes Beispiel betrachten wir die folgende C^*-Algebra:

3.1.0.7 Definition. *Bezeichne $C^*(z)$ die universelle unitale C^*-Algebra mit einem Erzeuger z, der die Gleichung $zz^* + z^*z = 1$ erfüllt.*

Die Existenz der Algebra $C^*(z)$ kann analog wie Lemma 2.1.2.5 bewiesen werden, folgt aber auch einfach daraus, daß wir sie in Satz 3.1.0.9 explizit konstruieren. Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß man $C^*(z)$ als einen "nichtkommutativen Kreis" auffassen kann:

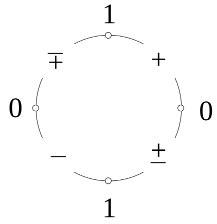
3.1.0.8 Lemma. *Sei I das von dem Element $[z, z^*] \in C^*(z)$ erzeugte Ideal. Sei $S^1 = \{a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$, und $\xi \in C(S^1)$ die identische Funktion. Dann definiert die Zuordnung $z + I \mapsto \xi/\sqrt{2}$ einen Isomorphismus $C^*(z)/I \xrightarrow{\sim} C(S^1)$.*

Beweis: Das Element $\sqrt{2}(z + I) \in C^*(z)/I$ ist unitär und hat als Spektrum ganz S^1 (aufgrund der Universalität von $C^*(z)$). Die Behauptung folgt nun aus dem Spektraltheorem 2.1.1.3. □

Bevor wir die Algebra $C^*(z)$ genauer beschreiben, betrachten wir zunächst den kommutativen Fall:

Identifizieren wir S^1 mit dem Quotienten

$$[0,1] \times \{+, \mp, -, \pm\} / {\scriptstyle \begin{matrix} (0,+)=(0,\pm),\ (0,-)=(0,\mp) \\ (1,+)=(1,\mp),\ (1,\pm)=(1,-) \end{matrix}}$$



wie im Bild rechts, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$C(S^1) \;\cong\; S\big(\mathbb{C}^4; \langle(1, -1, -1, 1)\rangle, \langle(1, 1, -1, -1)\rangle\big).$$

Wenn wir $\mathbb{C}^4$ mit $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ identifizieren und $u = (1,-1) \otimes 1$ sowie $v = 1 \otimes (1,-1)$ setzen, erhalten wir einen Isomorphismus $C(S^1) \cong S\big(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2; \langle u\rangle, \langle v\rangle\big)$ via $\xi \mapsto \sqrt{1-t}u + i\sqrt{t}v$. Die Algebra $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ist offenbar die universelle C^*-Algebra zweier kommutierender Symmetrien. Ersetzen wir sie durch $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$, die universelle C^*-Algebra zweier beliebiger Symmetrien, so erhalten wir $C^*(z)$:

3.1.0.9 Satz. *i) Bezeichne $C^*(x,y)$ die universelle unitale C^*-Algebra zweier selbstadjungierter Elemente x und y mit der Relation $x^2 + y^2 = 1$. Dann definieren die Vorschriften*

$$z \mapsto (x+iy)/\sqrt{2} \quad \textit{und} \quad x \mapsto (z+z^*)/\sqrt{2}, \quad y \mapsto (z-z^*)/(i\sqrt{2})$$

zueinander inverse Isomorphismen $C^*(z) \leftrightarrows C^*(x,y)$.

ii) Sei Σ der simpliziale Komplex mit Ecken $s_1, \ldots, s_4$ und Kanten $\{s_1,s_2\}$, $\{s_2,s_3\}$, $\{s_3,s_4\}$, $\{s_4,s_1\}$. Dann definieren die Vorschriften

$$x \mapsto \sqrt{h_{s_1}} - \sqrt{h_{s_3}}, \qquad y \mapsto \sqrt{h_{s_2}} - \sqrt{h_{s_4}}, \tag{3.1}$$

$$h_{s_1} \mapsto (x_+)^2 \quad h_{s_3} \mapsto (x_-)^2, \quad h_{s_2} \mapsto (y_+)^2, \quad h_{s_4} \mapsto (y_-)^2$$

zueinander inverse Isomorphismen $C^*(x,y) \leftrightarrows C^f_\Sigma$. Dabei bezeichnen x_+, y_+ und x_-, y_- die Positiv- bzw. Negativteile von x und y (d.h. $x_\pm, y_\pm$ sind positiv, und $x_+x_- = y_+y_- = 0$).

iii) Bezeichne p_i bzw. q_i die i-te kanonische Projektion in der Unteralgebra $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} (\mathbb{C}1)$ bzw. $(\mathbb{C}1) \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$ von $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$, $i = 1,2$. Dann definiert die Vorschrift

$$h_{s_1} \mapsto (1-t)p_1, \quad h_{s_3} \mapsto (1-t)p_2, \quad h_{s_2} \mapsto tq_1, \quad h_{s_4} \mapsto tq_2 \tag{3.2}$$

einen Isomorphismus $\phi : C^f_\Sigma \xrightarrow{\sim} S\big(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2; \langle p_1, p_2\rangle, \langle q_1, q_2\rangle\big)$.

Beweis: i) Das Element $a := (x+iy)/\sqrt{2} \in C^*(x,y)$ erfüllt die Relation

$$aa^* + a^*a = \frac{1}{2}\big[(x+iy)(x-iy) + (x-iy)(x+iy)\big] = x^2 + y^2 = 1,$$

und die Elemente $b := (z+z^*)/\sqrt{2}$, $c := (z-z^*)/(i\sqrt{2}) \in C^*(z)$ erfüllen die Relation

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{2}\big[(z^2 + z^{*2} + zz^* + z^*z) - (z^2 + z^{*2} - zz^* - z^*z)\big] = zz^* + z^*z = 1.$$

Die Existenz der Homomorphismen folgt nun aus den universellen Eigenschaften von $C^*(z)$ und $C^*(x,y)$. Offensichtlich sind sie zueinander invers.

ii) In C^f_Σ gilt $h_{s_1}h_{s_3} = 0 = h_{s_2}h_{s_4}$ und somit

$$\left(\sqrt{h_{s_1}} - \sqrt{h_{s_3}}\right)^2 + \left(\sqrt{h_{s_2}} - \sqrt{h_{s_4}}\right)^2 = (h_{s_1} + h_{s_3}) + (h_{s_2} + h_{s_4}) = 1.$$

In $C^*(x,y)$ folgt aus $x_+x_- = 0 = y_+y_-$ die Gleichung $x_+^2 + x_-^2 + y_+^2 + y_-^2 = x^2 + y^2 = 1$. Somit definieren die Vorschriften (3.1) tatsächlich $*$-Homomorphismen, und offensichtlich sind diese zueinander invers.

iii) Die Vorschrift 3.2 liefert vermöge der universellen Eigenschaft von C^f_Σ einen $*$-Homomorphismus ϕ. Ein leichtes Stone-Weierstraß-Argument zeigt, daß ϕ surjektiv ist. Injektivität folgt daraus, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : C^f_\Sigma \to B(H)$ über ϕ faktorisiert:
Aus der Gleichung $x^2+y^2 = 1$ in $C^*(x,y)$ folgt, daß die Elemente x^2 und y^2 zentral sind. Diese entsprechen in C^f_Σ den Elementen $h_{s_1} + h_{s_3}$ und $h_{s_2} + h_{s_4}$. Somit ist $\rho(h_{s_1} + h_{s_3}) =: 1 - t$ skalar. Offenbar ist $t \in [0,1]$. Aus $\rho(h_{s_1})\rho(h_{s_3}) = 0$ folgt $\rho(h_{s_1}) = (1-t)P_1$ und $\rho(h_{s_3}) = (1-t)P_2$ für Projektionen P_1 und P_2 mit $P_1 + P_2 = 1$ (im Fall $t = 1$ oder nachfolgend $t = 0$ spielt die Wahl von $P_{1,2}$ bzw. $Q_{1,2}$ keine Rolle). Analog ist $\rho(h_{s_2}) = tQ_1$ und $\rho(h_{s_4}) = tQ_2$ für Projektionen Q_1 und Q_2 mit $Q_1 + Q_2 = 1$. Somit faktorisiert ϕ über die Auswertung an der Stelle t, gefolgt von dem durch $p_i \mapsto P_i$, $q_j \mapsto Q_j$ definierten Homomorphismus $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \to B(H)$. □

Teil iii) des obigen Lemmas stammt aus [5], und die Beobachtung ii) steht in [3].

3.1.0.10 Satz. *Es gilt* $K_0(C^*(z)) = [1]\mathbb{Z}$ *und* $K_1(C^*(z)) = 0$.

Beweis: Aus Theorem 2.2.0.20 folgt $K_0(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) = [p_1]\mathbb{Z} \oplus [q_1]\mathbb{Z} \oplus [1]\mathbb{Z}$ und $K_1(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) = 0$. Die Mayer-Vietoris-Sequenz zu $C^*(z) \cong S\big(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2; \langle p_1, 1\rangle, \langle q_1, 1\rangle\big)$ hat wegen $K_1(\langle p_1, 1\rangle) = K_1(\langle q_1, 1\rangle) = 0$ die Gestalt

$$0 \to K_0(C^*(z)) \to K_0(\langle p_1, 1\rangle) \oplus K_0(\langle q_1, 1\rangle) \to K_0(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) \to K_1(C^*(z)) \to 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

3.2 Beispiele eindimensionaler simplizialer Komplexe

3.2.1 Bipartite simpliziale Komplexe

Alle Beispiele simplizialer Komplexe, die wir betrachten werden, fallen in folgende Klasse:

3.2.1.1 Definition. *Ein* bipartiter Komplex $(\Sigma; V_\Sigma^0, V_\Sigma^1)$ *ist ein endlicher eindimensionaler simplizialer Komplex* Σ *mit einer Zerlegung* $V_\Sigma = V_\Sigma^0 \amalg V_\Sigma^1$ *seiner Eckenmenge, so daß*

$$\Sigma \ \subset \ \Big\{\{s\} \mid s \in V_\Sigma\Big\} \cup \Big\{\{s_0, s_1\} \mid s_i \in V_\Sigma^i\Big\}.$$

Wir bezeichnen den bipartiten Komplex nachlässig auch einfach mit Σ. *Für eine Ecke* $s \in V_\Sigma$ *ist die Menge* $N_\Sigma(s)$ *ihrer* Nachbarn *definiert als*

$$N_\Sigma(s) \ := \ \{s' \in V_\Sigma \mid s' \neq s, \ \{s, s'\} \in \Sigma\}.$$

Für diese Klasse von Komplexen können wir die assoziierte C^*-Algebra mittels folgender Konstruktion beschreiben:

3.2.1.2 Definition. *Die* C^**-Projektionenalgebra* $\mathcal{P}^*(\Sigma; V_\Sigma^0, V_\Sigma^1)$ *eines bipartiten Komplexes* Σ *ist die universelle unitale* C^**-Algebra mit Projektionen* $p_s, s \in V_\Sigma$, *und den Relationen*

$$\begin{aligned} \sum_{s \in V_\Sigma^i} p_s &= 1, \quad i = 0, 1, \\ p_s p_{s'} &= 0, \quad \{s, s'\} \notin \Sigma. \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir stets eine Zerlegung $V_\Sigma = V_\Sigma^0 \amalg V_\Sigma^1$ *fixieren und die Abkürzungen* $\mathcal{P}_\Sigma := \mathcal{P}^*(\Sigma; V_\Sigma^0, V_\Sigma^1)$ *sowie* $\mathcal{P}_\Sigma^i := \langle p_s | s \in V_\Sigma^i \rangle \subset \mathcal{P}_\Sigma$ *für* $i = 0, 1$ *verwenden.*

3.2.1.3 Satz. *Sei* $(\Sigma; V_\Sigma^0, V_\Sigma^1)$ *ein bipartiter Komplex. Dann besteht ein Isomorphismus*

$$C_\Sigma^f \xrightarrow{\sim} S\big(\mathcal{P}_\Sigma; \mathcal{P}_\Sigma^0, \mathcal{P}_\Sigma^1\big) \quad \textit{mit} \quad \begin{array}{lcll} h_s & \mapsto & (1-t)p_s, & s \in V_\Sigma^0, \\ h_{s'} & \mapsto & tp_{s'}, & s' \in V_\Sigma^1. \end{array}$$

Beweis: Die Existenz des Homomorphismus folgt aus der universellen Eigenschaft von C_Σ^f. Surjektivität folgt aus einer einfachen Anwendung

des Satzes von Stone-Weierstraß. Injektivität folgt daraus, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : C^f_\Sigma \to B(H)$ über den Homomorphismus faktorisiert:
Setze

$$e^i = \sum_{s \in V^i_\Sigma} h_s, \quad i = 0, 1.$$

Da für zwei verschiedene Ecken $s, s' \in V^i_\Sigma$ stets $\{s, s'\} \notin \Sigma$ und somit $h_s h_{s'} = 0$ gilt, kommutiert h_s mit e^i, und wegen $e^0 + e^1 = 1$ auch mit e^{1-i}. Folglich sind e^0 und e^1 zentral und $\rho(e^1) =: t$ sowie $\rho(e^0) = 1 - t$ skalar. Für jede Ecke $s \in V^0_\Sigma$ ist wegen $\rho(h_s)(1-t) = \rho(h_s)\rho(e^0) = \rho(h_s)^2$ das Bild $\rho(h_s)$ Vielfaches einer Projektion P_s: $\rho(h_s) = (1-t)P_s$ (nutze das Spektraltheorem). Analog ist $\rho(h_{s'}) = tP_{s'}$ für $s' \in V^1_\Sigma$ mit Projektionen $P_{s'}$.

Im Fall $t = 0$ oder $t = 1$ faktorisiert ρ über den obigen Homomorphismus, verknüpft mit der Auswertung an der Stelle t. Im allgemeinen Fall folgt aus den Relationen der h_s für $\{s, s'\} \notin \Sigma$ sofort $P_s P_{s'} = 0$. Aus

$$1 = \rho\left(\sum_s h_s\right) = (1-t) \sum_{s \in V^0_\Sigma} P_s + t \sum_{s' \in V^1_\Sigma} P_{s'}$$

erhalten wir schließlich

$$\sum_{s \in V^0_\Sigma} P_s = 1 = \sum_{s' \in V^1_\Sigma} P_{s'}.$$

Somit ist die von den $P_s, s \in V_\Sigma$, erzeugte Algebra ein Quotient von $\mathcal{P}_\Sigma$. □

Anwendung auf Bäume

Eine besonders einfache Klasse von bipartiten Komplexen sind Bäume:

3.2.1.4 Definition. *Ein simplizialer Komplex heißt* Baum*, falls er eindimensional und als Graph zusammenhängend sowie azyklisch ist, d.h.*

$$\forall s, s' \in V_\Sigma \ \exists \{s, s_1\}, \ldots, \{s_i, s_{i+1}\}, \ldots, \{s_{n-1}, s'\} \in \Sigma, \tag{3.3}$$

$$\{s_0, s_1\}, \ldots, \{s_i, s_{i+1}\}, \ldots, \{s_{n-1}, s_0\} \in \Sigma \ \Rightarrow \ s_0 = \cdots = s_{n-1}. \tag{3.4}$$

Der folgende Satz ist ein Spezialfall des später folgenden Satzes 3.2.5.3.

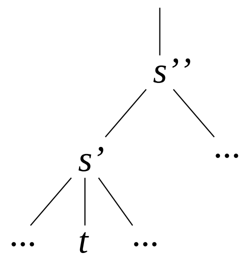
3.2.1.5 Satz. *Sei Σ ein endlicher Baum. Dann ist C^f_Σ kommutativ.*

Beweis: Wähle eine Wurzel $s \in V_\Sigma$. Für jede Ecke $s' \in V_\Sigma$ sei der Abstand $n_{s'}$ zur Wurzel definiert als die Zahl n in Bedingung (3.3) (diese Zahl ist eindeutig bestimmt wegen Bedingung (3.4)). Mit $V_\Sigma^i := \{s' \in V_\Sigma \mid n_{s'} \equiv i \mod 2\}$ ist $(\Sigma; V_\Sigma^0, V_\Sigma^1)$ ein bipartiter Komplex.

Wir wenden nun den Satz 3.2.1.3 an und zeigen mittels absteigender Induktion, daß die Erzeuger $p_{s'}, s' \in V_\Sigma$, der Algebra $\mathcal{P}_\Sigma$ kommutieren: Weil der Baum endlich ist, gilt für hinreichend großes n

$$[p_{s'}, p_{s''}] = 0 \quad \text{für alle } s', s'' \in V_\Sigma \text{ mit } n_{s'} > n \text{ und } n_{s''} \geq n.$$

Seien $s', s'' \in V_\Sigma$ mit $n_{s'} = n$ und $n_{s''} = n - 1$. Im Fall $\{s', s''\} \notin \Sigma$ gilt $p_{s'}p_{s''} = 0$. Andernfalls gilt für alle Nachbarn $t \in N_\Sigma(s') \setminus \{s''\}$ von s' nach Induktionsvoraussetzung $[p_{s'}, p_t] = 0$ wegen $n_t = n + 1$. Aus



$$p_{s'} = \sum_{t \in N_\Sigma(s')} p_{s'}p_t = p_{s'}p_{s''} + \sum_{t \in N_\Sigma(s') \setminus \{s''\}} p_{s'}p_t$$

folgt $[p_{s'}, p_{s''}] = 0$.

□

Bemerkung. Der Satz kann auf unendliche Bäume ausgedehnt werden: Jeder endliche Teilbaum F eines Baumes Σ ist ein Retrakt von Σ und liefert eine Faktorisierung $C_F^f \to C_\Sigma^f \to C_F^f$ der Identität auf C_F^f. Da die Frage der Kommutativität bezüglich jeder Ecke lokal ist, folgt die Behauptung für unendliche Bäume nun leicht aus dem endlichen Fall.

Die geometrische Realisierung eines Baumes Σ ist zusammenziehbar, somit ist nach dem obigen Satz die Algebra C_Σ^f homotopie-äquivalent zu $\mathbb{C}$. Das folgt auch aus dem nachstehenden Lemma:

3.2.1.6 Lemma. *Sei Σ ein simplizialer Komplex und $s \in V_\Sigma$ eine Ecke mit nur einem Nachbarn $N_\Sigma(s) = \{s'\}$. Dann induziert die Inklusion ι von $\Sigma' := \Sigma \setminus \{\{s\}, \{s, s'\}\}$ in Σ eine Homotopie-Äquivalenz $C_{\Sigma'}^f \sim_h C_\Sigma^f$.*

Beweis: Sei $\pi : \Sigma \to \Sigma'$ definiert durch $\pi|_{V_\Sigma \setminus \{s\}} = \mathrm{id}$ und $s \mapsto s'$. Dann ist $\pi \circ \iota$ die Identität auf Σ' und folglich $\iota^* \circ \pi^*$ die Identität auf $C_{\Sigma'}^f$. Die Komposition $\pi^* \circ \iota^* : C_\Sigma^f \to C_\Sigma^f$ ist gegeben durch

$$h_s \mapsto 0, \qquad h_{s'} \mapsto h_s + h_{s'}, \qquad h_{s''} \mapsto h_{s''} \text{ für } s'' \in V_\Sigma \setminus \{s, s'\}.$$

Dies ist homotop zur Identität via

$$h_s \mapsto (1-t)h_s, \quad h_{s'} \mapsto th_s + h_{s'}, \quad h_{s''} \mapsto h_{s''} \text{ für } s'' \in V_\Sigma \setminus \{s, s'\}$$

mit $t \in [0, 1]$. □

3.2.2 Beispiel A

Konstruktion 1

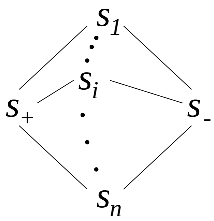
Simplizialer Komplex $\mathfrak{A}^n$:

Ecken:

$$s_+, s_-,\ s_1 \ldots, s_n,$$

Kanten:

$$\{s_\pm, s_1\}, \ldots, \{s_\pm, s_n\}$$



Assoziierte Algebra $C^f_{\mathfrak{A}^n}$:

universelle unitale C^*-Algebra mit positiven Erzeugern

$$h_+, h_-,\ h_1, \ldots, h_n$$

und den Relationen

$$h_i h_j = 0, \quad i \neq j, \tag{3.5}$$

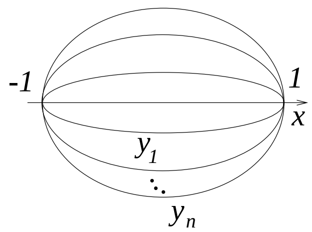
$$h_+ h_- = 0, \tag{3.6}$$

$$h_+ + h_- + \sum_i h_i = 1. \tag{3.7}$$

Konstruktion 2

Die nachfolgende Konstruktion liefert im kommutativen Fall offensichtlich dieselbe Algebra:

Kommutatives Bild:



Bezeichne $\mathcal{C}_{A,n}$ die universelle unitale C^*-Algebra mit selbstadjungierten Erzeugern

$$x, y_1, \ldots, y_n$$

und den Relationen

$$y_i y_j = 0, \quad i \neq j, \tag{3.8}$$

$$x^2 + \sum_i y_i^2 = 1. \tag{3.9}$$

3.2.2.1 Satz. *i) Die Vorschrift*

$$x \mapsto \sqrt{h_+} - \sqrt{h_-}, \quad y_i \mapsto \sqrt{h_i} - \sqrt{h_{i+n}}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.10}$$

definiert einen Isomorphismus $\mathcal{C}_{A,n} \xrightarrow{\sim} C^f_{\mathfrak{A}^{2n}}$.

ii) Bezeichne p_i bzw. q_i die i-te kanonische Projektion in der Unter-

algebra $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1$ *bzw.* $\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^n$ *von* $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^n$*. Die Vorschrift*

$$h_+ \mapsto (1-t)p_1, \quad h_- \mapsto (1-t)p_2, \quad h_1 \mapsto tq_1, \ldots, h_n \mapsto tq_n \tag{3.11}$$

definiert einen Isomorphismus $C^f_{\mathfrak{A}^n} \xrightarrow{\sim} S\big(\mathbb{C}^2\star_{\mathbb{C}1}\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^2\star_{\mathbb{C}1}\mathbb{C}1, \mathbb{C}1\star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^n\big)$.

iii) $K_0(C^f_{\mathfrak{A}^n}) = [1]\mathbb{Z}$ *und* $K_1(C^f_{\mathfrak{A}^n}) = 0$.

Beweis: i) Die Abbildung (3.10) überführt die Relationen (3.8) und (3.9) in (3.5) und (3.7).

ii) Mit $V^0_{\mathfrak{A}^n} := \{s_+, s_-\}$ und $V^1_{\mathfrak{A}^n} := \{s_1, \ldots, s_n\}$ ist der Komplex $\mathfrak{A}^n$ offensichtlich bipartit. Man sieht leicht, daß die Vorschrift

$$p_{s_+} \mapsto p_1, \qquad p_{s_-} \mapsto p_2, \qquad p_{s_1} \mapsto q_1, \ldots, p_{s_n} \mapsto q_n,$$

einen Isomorphismus $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}^n} \to \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^n$ definiert, dessen Komposition mit dem Isomorphismus aus Satz 3.2.1.3 gerade (3.11) liefert.

iii) Folgt analog wie im Beweis von Satz 3.1.0.10. □

3.2.3 Beispiel B

Nun betrachten wir mehrere Varianten der Konstruktion eines nichtkommutativen Analogons zur Einpunktvereinigung $\bigvee^n S^1$ von n Schlaufen. Interessanterweise erhalten wir dabei stets dieselbe Algebra.

Konstruktion 1

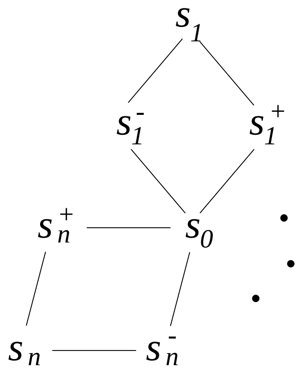
Simplizialer Komplex $\mathfrak{B}^n$:

Ecken:

$$s, \quad s_i, s_i^+, s_i^-, \ 1 \leq i \leq n,$$

Kanten:

$$\{s_0, s_i^\pm\}, \{s_i^\pm, s_i\}, \ 1 \leq i \leq n.$$



Assoziierte Algebra $C^f_{\mathfrak{B}^n}$:

universelle unitale C^*-Algebra mit positiven Erzeugern

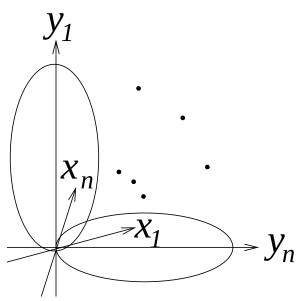
$$h_0, \quad h_i, h_i^+, h_i^-, \ 1 \leq i \leq n,$$

und den Relationen

$$\begin{aligned}
hh' &= 0, \quad h, h' \in \{h_1^\pm, \ldots, h_n^\pm\}, h \neq h', \\
h_0 h_j &= 0, \quad 1 \leq j \leq n, \\
h_0 + \sum_{i=1}^{n} (h_i + h_i^+ + h_i^-) &= 1.
\end{aligned}$$

Konstruktion 2

Kommutatives Bild:



Bezeichne $\mathcal{C}_{B,n}$ die universelle unitale C^*-Algebra mit selbstadjungierten Erzeugern

$$x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$$

und den Relationen

$$0 = (y_i^2 + x_i^2 - y_i) y_i, \tag{3.12}$$

$$0 = (y_i^2 + x_i^2 - y_i) x_i, \tag{3.13}$$

$$0 = (y_i^2 + x_i^2 - y_i)(y_j^2 + x_j^2 - y_j), \tag{3.14}$$

$$0 = y_i y_j = x_i x_j = y_i x_j, \quad i \neq j. \tag{3.15}$$

Erläuterung: In der algebraischen Geometrie betrachtet man Varietäten V, die durch Ideale $I(V)$ in einem Polynomring beschrieben werden, und der Vereinigung zweier Varietäten V_1, V_2 entspricht – je nach Auffassung – der Schnitt $I(V_1) \cap I(V_2)$ oder das Produkt $I(V_1)I(V_2)$ der zugehörigen Ideale. Dies wurde hier auf die Einpunktvereinigung von n Kreisen $V_1, \ldots, V_n$ mit $I(V_j) = (x_i, y_i, (x_j^2 + y_j^2 - y_j) | i \neq j)$ übertragen.

Konstruktion 3 Sei $x \in S^1$ ein ausgewählter Grundpunkt und bezeichne $ev_x : C(S^1) \to \mathbb{C}$ die Auswertung an x. Dann ist $C(S^1 \vee S^1) \cong C(S^1)\,{}_{ev_x}\!\vee_{ev_x} C(S^1)$. Wir ersetzen nun die kommutative Kreisalgebra $C(S^1)$ durch den nichtkommutativen Kreis $C^*(z)$, und den Grundpunkt x durch den $*$-Homomorphismus $\phi : C^*(z) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1$, und definieren wir $\mathcal{C}_n := \vee_\phi^n C^*(z)$.

3.2.3.1 Satz. *i) Bezeichne p_j^i bzw. q_j^i die j-te ($j = 1, 2$) kanonische Projektion in der Unteralgebra $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1$ bzw. $\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$ des i-ten ($i = 1, \ldots, n$) Summanden $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \subset \oplus^n(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2)$ (d.h. $p_1^1 = ((1,0) \star 1, 0 \ldots, 0)$, $p_2^1 = ((0,1) \star 1, 0, \ldots 0)$, $q_1^n = (0, \ldots, 0, 1 \star (1,0))$, $q_2^n = (0, \ldots, 0, 1 \star (0,1))$). Die Vorschrift*

$$h_0 \mapsto (1-t)\sum_{k=1}^{n} p_1^k, \quad h_i \mapsto (1-t)p_2^i, \quad h_i^+ \mapsto tq_1^i, \quad h_i^- \mapsto tq_2^i, \ 1 \le i \le n,$$

definiert einen Isomorphismus $\phi_B : C^f_{\mathfrak{B}^n} \xrightarrow{\sim} A$ mit

$$A \ := \ S\big(\oplus^n (\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2); \langle p_1^1 + \cdots + p_1^n, p_2^1, \ldots, p_2^n\rangle, \oplus^n(\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2)\big).$$

ii) Alle drei Konstruktionen liefern dieselbe Algebra: $\mathcal{C}_{B,n} \cong C^f_{\mathfrak{B}^n} \cong \mathcal{C}_n$.

Beweis: i) Mit $V^0_{\mathfrak{B}^n} := \{s_0, \ldots, s_n\}$ und $V^1_{\mathfrak{B}^n} := \{s_1^+, s_1^-, \ldots s_n^+, s_n^-\}$ ist der Komplex $\mathfrak{B}^n$ bipartit. Betrachten wir die Algebra $\mathcal{P}_{\mathfrak{B}^n}$:
Die Projektionen $p_{s_i^+}$ und $p_{s_i^-}$ kommutieren mit $p_{s_i} + p_{s_0}$, weiterhin kommutiert p_{s_i} mit $p_{s_i^+} + p_{s_i^-}$, und folglich kommutiert auch p_{s_0} mit $p_{s_i^+} + p_{s_i^-}$. Somit haben wir eine Zerlegung $p_{s_0} = p_{0,1} + \cdots + p_{0,n}$ in orthogonale Projektionen $p_{0,i} := (p_{s_i^+} + p_{s_i^-})p_{s_0}$. Man sieht nun leicht, daß die Zuordnung

$$p_{0,i} \mapsto p_1^i, \qquad p_{s_i} \mapsto p_2^i, \qquad p_{s_i^+} \mapsto q_1^i, \qquad p_{s_i^-} \mapsto q_2^i, \qquad 1 \le i \le n,$$

einen Isomorphismus $\mathcal{P}_{\mathfrak{B}^n} \xrightarrow{\sim} \oplus^n(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2)$ definiert, dessen Komposition mit dem Isomorphismus aus Satz 3.2.1.3 gerade ϕ_B ergibt.

ii) a) Wir zeigen zuerst $\mathcal{C}_{B,n} \cong C^f_{\mathfrak{B}^n}$: Die Elemente

$$a_i := \frac{1-t}{2}(p_1^i - p_2^i), \quad b_i := \frac{\sqrt{1-(1-t)^2}}{2}(q_1^i - q_2^i), \quad c_i := \frac{1}{2} + b_i$$

von A genügen der Gleichung

$$a_i^2 + c_i^2 - c_i = \frac{(1-t)^2}{4} + \left(\frac{1}{4} + b_i + \frac{1-(1-t)^2}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + b_i\right) = 0.$$

Man prüft nun leicht nach, daß die Vorschrift $x_i \mapsto a_i, y_i \mapsto c_i, 1 \leq i \leq n$, einen $*$-Homomorphismus $\psi_B : \mathcal{C}_{B,n} \to A$ definiert. Surjektivität des Homomorphismus folgt aus einem einfachen Stone-Weierstraß-Argument. Injektivität folgt daraus, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : \mathcal{C}_{B,n} \to B(H)$ über ψ_B faktorisiert:
Aus (3.12) folgt $y_i x_i^2 = x_i^2 y_i$, und zusammen mit (3.15) sieht man, daß x_i^2 zentral und folglich $\rho(x_i^2)$ skalar ist. Sei $\rho(x_i^2) =: (1-t)^2 \neq 0$. Dann folgt aus (3.15) wegen $x_i^2 x_j = 0 = x_i^2 y_j$ die Gleichung $\rho(x_j) = 0 = \rho(y_j)$ für alle $j \neq i$. Für y_i folgt aus (3.13)

$$\rho(y_i) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-(1-t)^2}}{2}(Q_1^i - Q_2^i)$$

mit Projektionen $Q_1^i, Q_2^i \in B(H)$ mit $Q_1^i + Q_2^i = 1$. Somit faktorisiert ρ über ψ_B, gefolgt von der Auswertung an der Stelle t.

Gilt $\rho(x_i^2) = 0$ für alle i, so folgt aus (3.12) $\rho(y_i) = Q^i$ für Projektionen $Q^1, \ldots, Q^n \in B(H)$, und wegen (3.15) ist $Q^i Q^j = 0$ für $i \neq j$. Somit faktorisiert ρ über ψ_B, gefolgt von der Auswertung an der Stelle 1.

b) Wir zeigen nun $C^f_{\mathfrak{B}^n} \cong \mathcal{C}_n$: Unter dem Isomorphismus

$$\begin{gathered} C^*(z) \cong C^f_{\mathfrak{B}^1} \cong S\big(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2; \langle p_1, p_2\rangle, \langle q_1, q_2\rangle\big), \\ z \mapsto \sqrt{1-t}(p_1 - p_2) + i\sqrt{t}(q_1 - q_2) \end{gathered}$$

aus Satz 3.1.0.9 hat ϕ die Form $f \mapsto \pi(f(0))$, wobei $\pi : \langle p_1, p_2\rangle \to \mathbb{C}$ die Projektion $p_1 \mapsto 1, p_2 \mapsto 0$ bezeichnet. Nach Definition der Join-Operation ist dann

$$\begin{aligned} \bigvee_{\phi}^{n} \left(C^f_{\mathfrak{B}^1}\right) &\cong \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in \oplus^n \left(C^f_{\mathfrak{B}^1}\right) \mid \phi(a_1) = \cdots = \phi(a_n) \,\} \\ &\cong S\big(\oplus^n (\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2); C^0, C^1\big) \end{aligned}$$

mit $C^1 = \oplus^n(\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2)$ und

$$\begin{aligned} C^0 &= \{\, ((a, b_1) \star 1, \ldots, (a, b_n) \star 1) \in \oplus^n \left(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1\right) \mid a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C} \,\} \\ &= \langle p_1^1 + \cdots + p_1^n, p_2^1, \ldots, p_2^n\rangle. \end{aligned}$$

□

Auf K-Theorie-Ebene sieht diese "nichtkommutative Einpunktvereinigung" so aus, als ob man lauter einzelne Punkte zusammenklebt, was wieder einen Punkt ergibt:

3.2.3.2 Satz. *$K_0(C^f_{\mathfrak{B}^n}) = [1]\mathbb{Z}$ und $K_1(C^f_{\mathfrak{B}^n}) = 0$.*

Beweis: Statt zur Berechnung der K-Gruppen von $C^f_{\mathfrak{B}^n}$ das im obigen Satz gewonnene Bild von $C^f_{\mathfrak{B}^n}$ zu verwenden und wie im Beweis von Satz 3.1.0.10 auf Theorem 2.2.0.20 zurückzugreifen, betrachten wir (zur Abwechslung) die pull-back-Konstruktion 2.1.2.2 auf K-Ebene:

Setze $A = C^f_{\mathfrak{B}^1}$ und $I = \ker\phi$. Der Isomorphismus $\vee^n_\phi A \cong C^f_{\mathfrak{B}^n}$ liefert eine exakte Leiter

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \oplus^n I \arrow[r] \arrow[d, equal] & \vee^n A \arrow[r, "\vee^n\phi"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \oplus^n I \arrow[r] & \oplus^n A \arrow[r, "\oplus^n\phi"] & \oplus^n\mathbb{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit $\Delta(\lambda) = (\lambda, \ldots, \lambda)$, und somit das folgende kommutative Diagramm von K-Gruppen:

$$\begin{tikzcd}
K_0(I)^n \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & K_0(C^f_{\mathfrak{B}^n}) \arrow[rr] \arrow[d] & & K_0(\mathbb{C}) \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& K_0(I)^n \arrow[r] & K_0(A)^n \arrow[r] & K_0(\mathbb{C})^n \arrow[d] & \\
& K_1(\mathbb{C})^n \arrow[u] & K_1(A)^n \arrow[l] & K_1(I)^n \arrow[l] \arrow[dr, equal] & \\
K_1(\mathbb{C}) \arrow[uuu] \arrow[ur] & & K_1(C^f_{\mathfrak{B}^n}) \arrow[ll] \arrow[u] & & K_1(I)^n. \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Satz 3.1.0.10 zufolge ist die Abbildung $\phi_* : K_0(A) \to K_0(\mathbb{C})$ ein Isomorphismus. Folglich ist $K_*(I) = 0$, und wir erhalten die Behauptung. $\square$

3.2.4 Beispiel C

Aus einem beliebigen eindimensionalen simplizialen Komplex Σ erhält man nach Aufspaltung jeder Kante in zwei neue Kanten (durch Einfügen einer neuen Ecke für jede alte Kante) einen bipartiten Komplex Σ'. Nun wäre es naheliegend, das Wissen über die Algebra $C^f_{\Sigma'}$ zu nutzen, um die Algebra C^f_Σ des Ausgangskomplexes zu untersuchen. Das nachfolgende Beispiel zeigt aber, daß die Transformation $C^f_\Sigma \mapsto C^f_{\Sigma'}$ keine Homotopie-Äquivalenz ist und die K-Gruppen ändern kann. Später werden wir sehen, daß die Algebra $C^f_{\Sigma'}$ stets kommutativ und isomorph zu den Funktionenalgebren $C(|\Sigma'|) \cong C(|\Sigma|)$ ist.

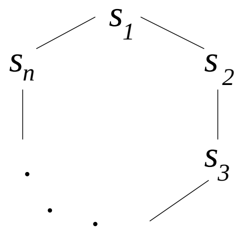
Simplizialer Komplex $\mathfrak{C}^n$:

Ecken:

$$s_1, \dots, s_n$$

Kanten:

$$\{s_1, s_2\}, \dots, \{s_n, s_1\}$$



Assoziierte Algebra $C^f_{\mathfrak{C}^n}$:

universelle unitale C^*-Algebra mit positiven Erzeugern

$$h_1, \dots, h_n$$

und den Relationen

$$\begin{aligned} h_i h_j &= 0, \quad i < j, \\ &\quad \{j, i\} \notin \{1, 2\}, \dots, \{n, 1\}, \\ \sum_{i=1}^{n} h_i &= 1. \end{aligned}$$

Aus dem untenstehenden Lemma 3.2.5.1 folgt unmittelbar

3.2.4.1 Satz. *Für gerade $n > 4$ ist die Algebra $C^f_{\mathfrak{C}^n}$ kommutativ und isomorph zu $C(S^1)$.* □

Zurück zu der Eingangsbemerkung: Die oben beschriebene Operation überführt den Komplex $\mathfrak{C}^4$ in den Komplex $\mathfrak{C}^8$. Die assoziierten Algebren $C^f_{\mathfrak{C}^4}$ und $C^f_{\mathfrak{C}^8}$ haben aber unterschiedliche K-Gruppen, $K_1(C^f_{\mathfrak{C}^4}) = 0 \neq \mathbb{Z} \cong K_1(C^f_{\mathfrak{C}^8}) = K_1(C(S^1))$, und sind nicht homotopie-äquivalent.

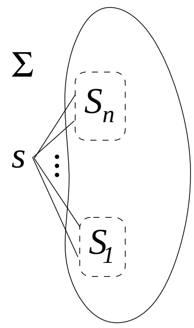
3.2.5 Mehrpunktvereinigung bipartiter Komplexe

Das folgende einfache Lemma bereitet Satz 3.2.5.3 vor:

3.2.5.1 Lemma. *Sei Σ ein bipartiter Komplex mit einer Ecke s und einer Zerlegung der Menge $N_\Sigma(s)$ der Nachbarn von s in disjunkte Teilmengen $S_1, \dots, S_n$, für die*

$$\left(\bigcup_{s' \in S_i} N_\Sigma(s') \right) \cap \left(\bigcup_{s'' \in S_j} N_\Sigma(s'') \right) = \{s\}, \quad i \neq j, \tag{3.16}$$

gilt. Dann kommutiert in der Algebra C^f_Σ das Element h_s mit jeder der Projektionen $g_i := \sum_{s' \in S_i} h_{s'}$, $i = 1, \dots, n$.



Beweis: Satz 3.2.1.3 zufolge genügt es, zu zeigen, daß in der Algebra $\mathcal{P}_\Sigma$ die Projektion p_s mit den Elementen $q_i := \sum_{s' \in S_i} p_{s'}$ für $i = 1, \ldots, n$ kommutiert. Sei

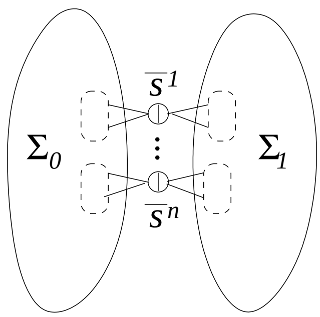
$$p_j = \sum_{s'' \in N_\Sigma(s'), s' \in S_j, s'' \neq s} p_{s''}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Für $i \neq j$ gilt wegen $S_i \cap S_j = \emptyset$ erstens $q_i q_j = 0$, und wegen der Separiertheit (3.16) zweitens $q_i p_j = 0$. Multiplikation der Gleichungen $q_i = q_i(p_s + p_i)$ und $p_s = \left(\sum_i q_i\right) p_s$ von rechts mit q_j liefert $0 = q_i p_s q_j$ und damit $p_s q_j = q_j p_s q_j = p_s q_j$. $\square$

Wir kommen nun zu einer Verträglichkeitsaussage für push-outs bipartiter Komplexe und pull-backs der assoziierten Algebren.

3.2.5.2 Definition. *Seien Σ_0 und Σ_1 simpliziale Komplexe mit Ecken $s_0^1, \ldots, s_0^n \in V_{\Sigma_0}$ und $s_1^1, \ldots, s_1^n \in V_{\Sigma_1}$. Die* Mehrpunktvereinigung *von Σ_0 und Σ_1 bezüglich $s_0^1, \ldots s_0^n$ und $s_1^1, \ldots, s_1^n$ ist das push-out*

$$\begin{tikzcd} & \Sigma_0 \arrow[dr] & \\ \amalg^n \star \arrow[ur, "\sigma_0"] \arrow[dr, "\sigma_1"'] & & \Sigma_0 \vee \Sigma_1, \\ & \Sigma_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{3.17}$$



wobei $\sigma_k : \amalg^n \star \to \Sigma_k$ die Einbettung der n Ecken $s_k^1, \ldots, s_k^n$ bezeichne, $k = 0, 1$.
Die Mehrpunktvereinigung heißt separiert*, falls*

$$\forall 1 \leq i < j \leq n \ \exists k \in \{0, 1\} : \ N_{\Sigma_k}(s_k^i) \cap N_{\Sigma_k}(s_k^j) = \emptyset \tag{3.18}$$

gilt.

Jede Einpunktvereinigung (der Fall $n = 1$) ist trivialerweise separiert.

3.2.5.3 Satz. *Seien $(\Sigma_k; V_{\Sigma_k}^0, V_{\Sigma_k}^1)$, $k = 0, 1$, zwei bipartite Komplexe mit Ecken $s_k^1, \ldots, s_k^n \in V_{\Sigma_k}^0$, $k = 0, 1$. Dann sind äquivalent:*

i) Die Mehrpunktvereinigung $\Sigma := \Sigma_0 \,{}_{\sigma_0}\!\vee_{\sigma_1} \Sigma_1$ ist separiert.

ii) Das von (3.17) induzierte Diagramm rechts ist ein pull-back, d.h.

$$C_\Sigma^f \cong \left(C_{\Sigma_0}^f\right) {}_{\sigma_0^*}\!\vee_{\sigma_1^*} \left(C_{\Sigma_1}^f\right).$$

$$\begin{tikzcd} & C_{\Sigma_0}^f \arrow[dl, "\sigma_0^*"'] & \\ \mathbb{C}^n & & C_{(\Sigma_0 \vee \Sigma_1)}^f \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & C_{\Sigma_1}^f \arrow[ul, "\sigma_1^*"] & \end{tikzcd}$$

Beweis: Für eine Ecke $s \in V_{\Sigma_{0,1}}$ bezeichne $\bar{s}$ die zugehörige Ecke in Σ. Setze $\bar{s}^j := \bar{s}_0^j = \bar{s}_1^j$ für $1 \leq j \leq n$.

Wir zeigen zunächst die Implikation ii) $\Rightarrow$ i):
Mit $V_\Sigma^j := \{\bar{s} | s \in V_{\Sigma_0}^j \amalg V_{\Sigma_1}^j\}$, $j = 0, 1$, ist Σ ein bipartiter Komplex, und aus Satz 3.2.1.3 folgt $C_\Sigma^f \cong S\big(\mathcal{P}_\Sigma; \mathcal{P}_\Sigma^0, \mathcal{P}_\Sigma^1\big)$. Wir konstruieren zuerst einen Isomorphismus $\phi : \mathcal{P}_{\Sigma_0} \oplus \mathcal{P}_{\Sigma_1} \to \mathcal{P}_\Sigma$:
Setze $e_k := \sum_{s \in V_{\Sigma_k}^1} p_{\bar{s}}$, $k = 0, 1$. Wenn wir zeigen können, daß die Projektionen e_0 und e_1 mit $p_{\bar{s}^j}$ kommutieren, erhalten wir eine Zerlegung $p_{\bar{s}^j} = p_{\bar{s}^j} e_0 \oplus p_{\bar{s}^j} e_1$ in orthogonale Projektionen, und mit

$$
\begin{aligned}
&(p_{s_0^j}, 0) \mapsto p_{\bar{s}^j} e_0, \qquad &&(p_s, 0) \mapsto p_{\bar{s}}, \quad &&s \in V_{\Sigma_0} \setminus \{s_0^1, \ldots, s_0^n\}, \\
&(0, p_{s_1^j}) \mapsto p_{\bar{s}^j} e_1, \qquad &&(0, p_{s'}) \mapsto p_{\bar{s}'}, \quad &&s' \in V_{\Sigma_1} \setminus \{s_1^1, \ldots, s_1^n\},
\end{aligned}
$$

den gewünschten Isomorphismus ϕ. Dazu wenden wir das Lemma 3.2.5.1 auf den Komplex Σ, die Ecke $\bar{s}^j$, und die Zerlegung $N_\Sigma(\bar{s}^j) = S_0 \amalg S_1$ mit $S_k := \{\bar{s}' | s' \in N_{\Sigma_k}(s_k^j)\}$, $k = 0, 1$, an. Die Bedingung (3.16) ist wegen der Separiertheit der Mehrpunktvereinigung erfüllt. Folglich kommutiert $p_{\bar{s}^j}$ mit $\sum_{s' \in S_k} p_{\bar{s}'}$ für $k = 0, 1$. Wegen $p_{\bar{s}^j} p_{\bar{s}'} = 0$ für $s' \in V_{\Sigma_k} \setminus S_k$ kommutiert $p_{\bar{s}^j}$ auch mit $\sum_{s' \in V_{\Sigma_k} \setminus S^k} p_{\bar{s}'}$, und deswegen auch mit e_0 und e_1.

Bezeichne $e^j \in \mathbb{C}^n$ den j-ten Einheitsvektor. Unter der Identifikation $C_{\Sigma_k}^f \cong S\big(\mathcal{P}_{\Sigma_k}; \mathcal{P}_{\Sigma_k}^0, \mathcal{P}_{\Sigma_k}^1\big)$ faktorisiert σ_k^* als Auswertung an der Stelle $t = 0$, gefolgt von dem $*$-Homomorphismus $\psi_k : \mathcal{P}_{\Sigma_k}^0 \to \mathbb{C}^n$, definiert durch $p_{s_k^j} \mapsto e^j$ und $p_s \mapsto 0$ für $s \in V_{\Sigma_k}^0 \setminus \{s_k^1, \ldots, s_k^n\}$. Demzufolge ist

$$
\left(C_{\Sigma_0}^f\right) {}_{\sigma_0^*}\!\vee_{\sigma_1^*} \left(C_{\Sigma_1}^f\right) \;\cong\; S\big(\mathcal{P}_{\Sigma_0} \oplus \mathcal{P}_{\Sigma_1}; C^0, C^1\big)
$$

mit $C^1 = \mathcal{P}_{\Sigma_0}^1 \oplus \mathcal{P}_{\Sigma_1}^1 \overset{\phi}{\equiv} \mathcal{P}_\Sigma^1$ und $C^0 = \big(\mathcal{P}_{\Sigma_0}^0\big) {}_{\psi_0}\!\vee_{\psi_1} \big(\mathcal{P}_{\Sigma_1}^0\big) \overset{\phi}{\equiv} \mathcal{P}_\Sigma^0$.

Wir zeigen nun die Implikation i) $\Rightarrow$ ii): Angenommen, die Separiertheit ist nicht erfüllt. Dann existieren zwei Indizes $1 \leq i < j \leq n$ und zwei Ecken $s_k \in N_{\Sigma_k}(s_k^i) \cap N_{\Sigma_k}(s_k^j)$ für $k = 0, 1$. Nun kann in dem von den Inklusionen $\Sigma_0, \Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma_0 \vee \Sigma_1 = \Sigma$ induzierten Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & & C^f_{\Sigma_0} \arrow[dr] & \\
C^f_\Sigma \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[r, dashed, "\psi"] & C^f_{\Sigma_0} \vee C^f_{\Sigma_1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{C}^n \\
 & & C^f_{\Sigma_1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

der von der universellen Eigenschaft von $C_{\Sigma_0}^f \vee C_{\Sigma_1}^f$ induzierte Homomorphismus ψ nicht injektiv sein: Die Inklusion $\iota : \mathfrak{C}^4 \hookrightarrow \Sigma$, definiert durch

$$s_1 \mapsto \bar{s}_0, \qquad s_2 \mapsto \bar{s}^i \qquad s_3 \mapsto \bar{s}_1, \qquad s_4 \mapsto \bar{s}^j,$$

induziert einen $*$-Homomorphismus $\iota^* : C^f_\Sigma \to \mathfrak{C}^4$. Setze $g := \sum_{s \in V^1_{\Sigma_0}} h_{\bar{s}}$. Dann ist $\iota^*(g) = h_{s_1}$, $\iota^*(h_{\bar{s}^i}) = h_{s_2}$, und nach Satz 3.1.0.9 gilt $[\iota^*(h_{\bar{s}^i}), \iota^*(g)] = [h_{s_2}, h_{s_1}] \neq 0$. Demzufolge ist auch $[h_{\bar{s}^i}, g] \neq 0$ in C^f_Σ. Andererseits ist in $C^f_{\Sigma_0} \vee C^f_{\Sigma_1}$ das Element $\psi(g) = (\sum_{s \in V^1_{\Sigma_0}} h_s,\, 0)$ zentral. □

Daraus folgt insbesondere

3.2.5.4 Korollar. *Sei $(\Sigma; V^0_\Sigma, V^1_\Sigma)$ ein bipartiter simplizialer Komplex ohne 4er-Zyklen (d.h. ohne eine Einbettung $\mathfrak{C}^4 \hookrightarrow \Sigma$). Dann ist C^f_Σ kommutativ.*

Beweis: Falls V^0_Σ leer ist, gilt die Behauptung trivialerweise. Andernfalls wählen wir ein $s \in V^0_\Sigma$ und schreiben Σ als Mehrpunktvereinigung des Kegels

$$\mathrm{Cone}_s \ := \ \big\{\{s'\}, \{s, s'\} \mid s' \in N_\Sigma(s)\big\} \cup \big\{s\big\}$$

und des "Restes"

$$\Sigma' \ := \ \{\sigma \in \Sigma \mid s \notin \sigma\}$$

bezüglich der Menge $N_\Sigma(s)$ der Nachbarn von s in Σ.

Nach Voraussetzung ist die Mehrpunktvereinigung separiert, und folglich ist $C^f_\Sigma = C^f_{\Sigma'} \vee C^f_{\mathrm{Cone}_s}$. Die Algebren $C^f_{\Sigma'}$ und $C^f_{\mathrm{Cone}_s}$ sind kommutativ (nach Induktion über die Anzahl der Ecken bzw. weil der Komplex Cone_s ein Baum ist), und somit ist auch C^f_Σ kommutativ. □

3.2.6 Spiegelungen "entlang" einer Mehrpunktvereinigung

Verkleben wir zwei Kopien eines Komplexes Σ an denselben Punkten der jeweiligen Kopie, so erhalten wir einen Komplex $\Sigma \vee \Sigma$ mit einer natürlichen $\mathbb{Z}_2$–Symmetrie. Für den Fall, daß Σ bipartit ist, können wir die K-Gruppen des verschränkten Produktes $C^f_{\Sigma\vee\Sigma} \rtimes \mathbb{Z}_2$ einfach bestimmen. Dazu benutzen wir folgendes Lemma:

3.2.6.1 Lemma. *Sei $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\phi} B \to 0$ eine exakte Sequenz von C^*-Algebren, und $\beta \in Aut(B)$ ein Automorphismus der Ordnung 2. Bezeichne α den Automorphismus $(a, a') \leftrightarrow (a', a)$ von $A \oplus A$.*

i) Es existiert ein Isomorphismus

$$\mu_A : (A \oplus A) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\sim} M_2(A), \quad (a, b) + (c, d)\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}.$$

ii) Die Unteralgebra $A\,{}_{\phi}\!\vee_{\beta\phi} A \subset A \oplus A$ ist stabil unter α.

iii) Es gibt eine exakte Leiter

$$\begin{tikzcd}
0 \to M_2(I) \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & (A\,{}_{\phi}\!\vee_{\beta\phi} A) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "(\phi\vee\beta\phi)\rtimes\mathbb{Z}_2"] \arrow[d, "\mu_A"] & B \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2 \to 0 \arrow[d, "g"] \\
0 \to M_2(I) \arrow[r] & M_2(A) \arrow[r, "f"] & M_2(B) \to 0
\end{tikzcd} \tag{3.19}$$

mit $f = M_2(\phi)$ und

$$h : \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \mapsto (\iota(a), \iota(b)) + (\iota(c), \iota(d))\sigma,$$

$$g : b + b'\sigma \mapsto \begin{pmatrix} b & b' \\ \beta(b') & \beta(b) \end{pmatrix}.$$

Beweis: i) Der Homomorphismus μ_A ist die Komposition der Einbettung $(A\oplus A) \rtimes \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow M_2(A\oplus A)$ aus Lemma 2.3.2.2 mit der Projektion $M_2(A\oplus A) \to M_2(A)$,

$$(a,b) + (c,d)\sigma \mapsto \begin{pmatrix} (a,b) & (c,d) \\ (d,c) & (b,a) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}.$$

ii) Wegen $\beta^2 = id_B$ gilt

$$(a,a') \in A\,{}_{\phi}\!\vee_{\beta\phi} A \;\Rightarrow\; \phi(a) = \beta\phi(a') \;\Rightarrow\; \beta\phi(a) = \phi(a') \;\Rightarrow\; (a',a) \in A\,{}_{\phi}\!\vee_{\beta\phi} A.$$

iii) Bezeichne γ den Automorphismus $(b,b') \leftrightarrow (\beta(b'), \beta(b))$ von $B \oplus B$. Dann besteht eine exakte Leiter

$$\begin{tikzcd}
0 \to (I\oplus I) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & (A \vee A) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d] & B \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2 \to 0 \arrow[d, "\Delta\rtimes\mathbb{Z}_2"] \\
0 \to (I\oplus I) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & (A\oplus A) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "(\phi\oplus\beta\phi)\rtimes\mathbb{Z}_2"] & (B\oplus B) \rtimes_\gamma \mathbb{Z}_2 \to 0.
\end{tikzcd}$$

Einzig nicht offensichtlich ist dabei die Äquivarianz von $\phi\oplus\beta\phi$ bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Operationen α und γ:

$$\begin{tikzcd}
(a,a') \arrow[r, mapsto, "\phi\oplus\beta\phi"] \arrow[d, mapsto, "\alpha"'] & (\phi(a), \beta\phi(a')) \arrow[d, mapsto, "\gamma"] \\
(a',a) \arrow[r, mapsto, "\phi\oplus\beta\phi"] & (\phi(a'), \beta\phi(a)).
\end{tikzcd}$$

Analog zu Teil i) des Lemmas erhält man einen Isomorphismus $\nu_B : (B \oplus B) \rtimes_\gamma \mathbb{Z}_2 \cong M_2(B)$,

$$\nu_b : (a,b) + (c,d)\sigma \mapsto \begin{pmatrix} (a,b) & (c,d) \\ (\beta(d),\beta(c)) & (\beta(b),\beta(a)) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ \beta(d) & \beta(b) \end{pmatrix}.$$

Das Diagramm (3.19) erhält man aus der obigen Leiter, indem man auf die Algebren $(I \oplus I) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$, $(A \oplus A) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$ und $(B \oplus B) \rtimes_\gamma \mathbb{Z}_2$ die Isomorphismen μ_I, μ_A und ν_B anwendet. Die Homomorphismen f, g und h ergeben sich dann aus den Kompositionen $f = \nu_B \circ ((\phi \oplus \beta\phi) \rtimes \mathbb{Z}_2) \circ \mu_A^{-1}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} &\mapsto (a,b) + (c,d)\sigma \\ &\mapsto (\phi(a), \beta\phi(b)) + (\phi(c), \beta\phi(d))\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \phi(a) & \phi(c) \\ \beta^2\phi(d) & \beta^2\phi(b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$g = \nu_B \circ (\Delta \rtimes \mathbb{Z}_2) : \; b + b'\sigma \mapsto (b,b) + (b',b')\sigma \mapsto \begin{pmatrix} b & b' \\ \beta(b') & \beta(b) \end{pmatrix}$$

und $h = (\iota \rtimes \mathbb{Z}_2) \circ \mu_I^{-1}$. □

3.2.6.2 Satz. *Sei $(\Sigma; V_\Sigma^0, V_\Sigma^1)$ ein bipartiter Komplex mit Ecken $s^1, \ldots, s^n \in V_\Sigma^0$, so daß $N_\Sigma(s^i) \cap N_\Sigma(s^j) = \emptyset$ für $i \neq j$. Auf der Mehrpunktvereinigung $\Sigma \vee \Sigma$ bezüglich $s^1, \ldots, s^n$ induziert die Vertauschung der beiden Komponenten von $\Sigma \amalg \Sigma$ eine Involution f. Es gilt*

$$K_0(C^f_{\Sigma\vee\Sigma} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2) \;\cong\; K_0(C^f_\Sigma) \oplus \mathbb{Z}^n, \qquad K_1(C^f_{\Sigma\vee\Sigma} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2) \;\cong\; K_1(C^f_\Sigma).$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Mehrpunktvereinigung separiert und folglich $C^f_{\Sigma\vee\Sigma} \cong \left(C^f_\Sigma\right) {}_\phi\!\vee_\phi \left(C^f_\Sigma\right)$, wobei $\phi : C^f_\Sigma \to \mathbb{C}^n$ gegeben ist durch $h_{s_i} \mapsto p_i$, $i = 1, \ldots, n$ (dabei bezeichne p_i den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{C}^n$). Unter dieser Identifikation ist der Automorphismus f^* gerade die Einschränkung der Vertauschung $\tau : (a,b) \leftrightarrow (b,a)$ der Summanden von $C^f_\Sigma \oplus C^f_\Sigma$ auf die Unteralgebra $C^f_\Sigma \vee C^f_\Sigma \subset C^f_\Sigma \oplus C^f_\Sigma$.

Setze $C := (C^f_\Sigma \vee C^f_\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}_2$ und $I := \ker\phi \subset C^f_\Sigma$. Aus Teil iii) des obigen Lemmas, angewendet auf $0 \to I \to C^f_\Sigma \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^n \to 0$ mit $\beta = id_{\mathbb{C}^n}$, erhalten wir die exakte Leiter

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_2(I) & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_2(I) & \to & M_2(C^f_\Sigma) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{C}^n) & \to & 0. \end{array}$$

Daraus erhalten wir mit $K_1(\mathbb{C}^n \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) = 0 = K_1(M_2(\mathbb{C}^n))$ die exakte Leiter

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_0(C) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(\mathbb{C}^n \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(I) \arrow[r] & K_0(C^f_\Sigma) \arrow[r] & K_0(M_2(\mathbb{C}^n)) \arrow[r] & K_1(I) \arrow[r] & K_1(C^f_\Sigma) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Die von der Inklusion $(\mathbb{C}^n \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow M_2(\mathbb{C}^n)$ induzierte Abbildung $K_0(\mathbb{C}^n \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) \to K_0(M_2(\mathbb{C}^n))$ sendet $[p_i]\frac{1\pm\sigma}{2}$ auf $[p_i]$, $i = 1, \ldots, n$, und ist folglich surjektiv. Die Behauptung folgt nun aus dem Vergleich des Ränge von $K_0(\mathbb{C}^n \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) = [p_1\frac{1\pm\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus [p_n\frac{1\pm\sigma}{2}]\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{2n}$ und $K_0(M_2(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}^n$. □

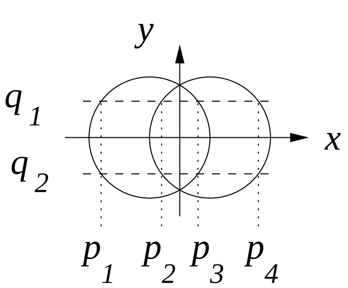
3.2.7 Beispiel D

Das folgende Beispiel zeigt

- erstens, daß die Übereinstimmung der verschiedenen Konstruktionen mittels simplizialer Komplexe und "algebraischer Kurven", wie sie in den Beispielen A,B und C auftrat, nicht weit geht, d.h. daß simpliziale Komplexe und Kurven, die im kommutativen Fall gleich aussehen, im nichtkommutativen Fall oft unterschiedliche Algebren liefern;
- und zweitens eine Anwendung des Satzes 3.2.5.3.

Konstruktion 1

Kommutatives Bild:



Bezeichne $\mathcal{C}_D$ die universelle unitale C^*-Algebra mit selbstadjungierten Erzeugern

$$x, y$$

und der Relation

$$(x^2+y^2-x-3/4)(x^2+y^2+x-3/4) = 0. \quad (3.20)$$

3.2.7.1 Satz. *Bezeichne p_i bzw. q_i die i-te kanonische Projektion in der Unteralgebra $\mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1$ bzw. $\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$ von $\mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$. Setze $\lambda := \sqrt{3}/2$. Die Vorschrift*

$$\begin{aligned}
y &\mapsto t(q_1 - q_2), \\
x &\mapsto \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{1-t^2}\right)(p_4 - p_1) + \left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{1-t^2}\right)(p_2 - p_3)
\end{aligned}$$

definiert einen Isomorphismus

$$\mathcal{C}_D \;\cong\; \{\, f : [0,1] \to \mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \;|\; f(t) \in C^t \;\; \textit{für} \;\; t = 0, \lambda, 1 \,\} \tag{3.21}$$

mit

$$C^0 = \mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1, \quad C^\lambda = \langle p_1, (p_2 + p_3), p_4, q_1, q_2 \rangle, \quad C^1 = \langle (p_1 + p_3), (p_2 + p_4), q_1, q_2 \rangle.$$

Beweis: Existenz des $*$-Homomorphismus folgt aus der universellen Eigenschaft von $\mathcal{C}_D$. Surjektivität zeigt man mit einem einfachen Stone-Weierstraß-Argument. Injektivität folgt daraus, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : \mathcal{C}_D \to B(H)$ über den Homomorphismus faktorisiert: Setze $a = x^2 + y^2 - 3/4$. Gleichung (3.20) liefert $[a - x, a + x] = 0$, somit $[a, x] = 0$, und schließlich $[y^2, x] = 0$. Folglich ist y^2 zentral und $\rho(y^2) =: t^2$ skalar sowie $\rho(y) = tU$ für eine Symmetrie U und ein Skalares t. Aus Gleichung (3.20) folgt dann mit Funktionalkalkül

$$\rho(x) = \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{1 - t^2}\right)(P_4 - P_1) + \left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{1 - t^2}\right)(P_2 - P_3)$$

für orthogonale Projektionen $P_1, \ldots, P_4$ mit $P_1 + \cdots + P_4 = 1$. $\square$

3.2.7.2 Satz. *Es gilt* $K_0(\mathcal{C}_D) = [1]\mathbb{Z}$ *und* $K_1(\mathcal{C}_D) = 0$.

Beweis: Die Auswertung an den Stellen $0, \lambda$ und 1 liefert die exakte Sequenz

$$0 \;\to\; S(\mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2)^2 \;\to\; \mathcal{C}_D \;\to\; C^0 \oplus C^\lambda \oplus C^1 \;\to\; 0$$

und somit

$$\begin{tikzcd}
K_0(S(\mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2))^2 \arrow[r] & K_0(\mathcal{C}_D) \arrow[r] & K_0(C^0 \oplus C^\lambda \oplus C^1) \arrow[d, "\phi"] \\
K_1(C^0 \oplus C^\lambda \oplus C^1) \arrow[u] & K_1(\mathcal{C}_D) \arrow[l] & K_1(S(\mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2))^2. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Einfache Anwendungen des Theorems 2.2.0.20 liefern $K_1(\mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) = 0$ und $K_1(C^t) = 0$ für $t = 0, \lambda, 1$, sowie

$$\begin{aligned}
K_0(\mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) &\cong [p_1]\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus [p_4]\mathbb{Z} \oplus [q_1]\mathbb{Z}, \\
K_0(C^0) &\cong [p_1]\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus [p_4]\mathbb{Z}, \\
K_0(C^\lambda) &\cong [p_1]\mathbb{Z} \oplus [p_2 + p_3]\mathbb{Z} \oplus [p_4]\mathbb{Z} \oplus [q_1]\mathbb{Z}, \\
K_0(C^1) &\cong [p_1 + p_3]\mathbb{Z} \oplus [p_2 + p_4]\mathbb{Z} \oplus [q_1]\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Bezeichne $i_t : C^t \hookrightarrow \mathbb{C}^4 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ die Inklusion, $t = 0, \lambda, 1$. Aus dem Mayer-Vietoris-Lemma 2.2.0.17 folgt $\phi = (i_{\lambda *} - i_{0*}) \oplus (i_{1*} - i_{\lambda *})$. Die Abbildung ϕ ist surjektiv:

$$\begin{aligned} (-[p_i],\ 0,\ 0) &\mapsto ([p_i],\ 0),\ i = 1, \ldots, 4, & (0,\ [q_1],\ [q_1]) &\mapsto ([q_1],\ 0), \\ (-[p_i],\ -[p_i],\ 0) &\mapsto (0,\ [p_i]),\ i = 1, 4 & (0,\ 0,\ [q_1]) &\mapsto (0,\ [q_1]), \\ ([p_4],\ [p_4],\ [p_2 + p_4]) &\mapsto (0,\ [p_2]), & (0,\ [p_1],\ [p_1 + p_3]) &\mapsto (0,\ [p_3]). \end{aligned}$$

Da links in dem obigen Diagramm Nullen stehen, ist $K_1(\mathcal{C}_D) \cong \operatorname{coker} \phi = 0$ und $K_0(\mathcal{C}_D) \cong \ker \phi \cong \mathbb{Z}$. Man sieht leicht, daß [1] ein Erzeuger von $K_0(\mathcal{C}_D)$ ist. □

Konstruktion 2

Der folgende simpliziale Komplex ist – vom kommutativen Bild her – eine Approximation der Kurve aus der Konstruktion 1:

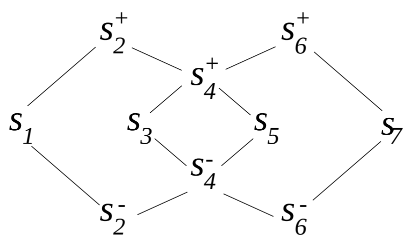
Simplizialer Komplex $\mathfrak{D}$:

Ecken:

$$s_1, s_2^{\pm}, s_3, s_4^{\pm}, s_5, s_6^{\pm}, s_7$$

Kanten:

$$\{s_1, s_2^{\pm}\}, \{s_2^r, s_4^r\}, \{s_4^{\pm}, s_3\},$$
$$\{s_4^{\pm}, s_5\}, \{s_4^r, s_6^r\}, \{s_6^{\pm}, s_7\}, \quad r = +, -$$



Die folgende recht explizite Beschreibung der assoziierten Algebra $C^f_{\mathfrak{D}}$ macht den Unterschied zwischen den beiden langen und den beiden kurzen Kantenzügen zwischen den Ecken s_4^+ und s_4^- deutlich:

3.2.7.3 Satz. *Bezeichne p_i bzw. q_i die i-te kanonische Projektion in der Unteralgebra $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1$ bzw. $\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$ von $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$. Definiere $\chi_\tau \in C([-2, 1])$ durch $\chi_\tau(t) = \max(1 - |\tau - t|, 0)$. Sei $A = C([-2, 1], \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2)$ und $I \subset A$ das von $(\chi_{-2} + \chi_{-1})[p_i, q_j]$, $i, j = 1, 2$, erzeugte Ideal. Setze $B = A/I$.*

Die Vorschrift

$$\begin{array}{llll} s_1 \mapsto \chi_{-2}\, q_1, & s_3 \mapsto \chi_1\, q_1, & s_5 \mapsto \chi_1\, q_2, & s_7 \mapsto \chi_{-2}\, q_2, \\ s_2^+ \mapsto \chi_{-1}\, p_1\, q_1, & s_2^- \mapsto \chi_{-1}\, p_2\, q_1, & s_6^+ \mapsto \chi_{-1}\, p_1\, q_2, & s_6^- \mapsto \chi_{-1}\, p_2\, q_2, \\ & s_4^+ \mapsto \chi_0\, p_1, & s_4^- \mapsto \chi_0\, p_2 & \end{array}$$

definiert einen Isomorphismus

$$C^f_{\mathfrak{D}} \;\cong\; \{\, f \in B \mid f(t) \in C^t \;\; \textit{für} \;\; t = -2, 0, 1 \,\}$$

mit

$$C^{-2} \;=\; \mathbb{C}1 \otimes \mathbb{C}^2, \quad C^0 \;=\; \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1 \quad \textit{und} \quad C^1 \;=\; \mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2.$$

Beweis: Der Komplex $\mathfrak{D}$ ist offensichtlich bipartit und kann als separierte Zweipunktvereinigung von $\mathfrak{C}^4$ mit $\mathfrak{C}^8$ bezüglich der Punkte $s_1, s_3 \in V_{\mathfrak{C}^4}$ und $s'_1, s'_5 \in V_{\mathfrak{C}^8}$ betrachtet werden. Satz 3.2.5.3 zufolge ist $C^f_{\mathfrak{D}} \cong \left(C^f_{\mathfrak{C}^4}\right) {}_{\phi}\vee_{\phi'} \left(C^f_{\mathfrak{C}^8}\right)$ mit

$$\begin{aligned} \phi : \; C^f_{\mathfrak{C}^4} \to \mathbb{C}^2, \quad & h_{s_1} \mapsto (1,0), \quad h_{s_3} \mapsto (0,1), \quad h_{s_i} \mapsto 0 \;\; \text{für } i \neq 1,3, \\ \phi' : \; C^f_{\mathfrak{C}^8} \to \mathbb{C}^2, \quad & h_{s'_1} \mapsto (1,0), \quad h_{s'_5} \mapsto (0,1), \quad h_{s'_j} \mapsto 0 \;\; \text{für } j \neq 1,5. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mittels Standardumformungen aus den Isomorphismen

$$\begin{aligned} C^f_{\mathfrak{C}^4} \;&\cong\; S\big((\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2) \,;\, (\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1) \,,\, (\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2) \big), \\ C^f_{\mathfrak{C}^8} \;\cong\; C(S^1) \;&\cong\; S\big((\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \,;\, (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}1) \,,\, (\mathbb{C}1 \otimes \mathbb{C}^2) \big). \end{aligned}$$

des vorigen Abschnittes. □

3.2.7.4 Satz. *Es gilt $K_0(C^f_{\mathfrak{D}}) = [1]\mathbb{Z}$ und $K_1(C^f_{\mathfrak{D}}) \cong \mathbb{Z}^2$.*

Beweis: Setze $I := \ker \phi$ und $I' := \ker \phi'$. Der Isomorphismus $C^f_{\mathfrak{D}} \cong \left(C^f_{\mathfrak{C}^4}\right) {}_{\phi}\vee_{\phi'} \left(C^f_{\mathfrak{C}^8}\right)$ liefert die exakte Leiter

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \oplus I' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^f_{\mathfrak{D}} \arrow[r, "\phi\vee\phi'"] \arrow[d] & \mathbb{C}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \oplus I' \arrow[r] & C^f_{\mathfrak{C}^4} \oplus C^f_{\mathfrak{C}^8} \arrow[r, "\phi\oplus\phi'"] & \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Betrachten wir zunächst die exakte Sequenz $0 \to I' \to C^f_{\mathfrak{C}^8} \xrightarrow{\phi'} \mathbb{C}^2 \to 0$:
Nach Satz 3.2.4.1 ist $C^f_{\mathfrak{C}^8} \cong C(S^1)$ und $I' \cong (S\mathbb{C})^2$. Folglich ist $K_0(I') = 0$, $K_1(I') \cong \mathbb{Z}^2$, und das Mayer-Vietoris-Lemma zeigt, daß die Index-Abbildung $\mathbb{Z}^2 \cong K_0(\mathbb{C}^2) \to K_1(I') \cong \mathbb{Z}^2$ die Form $(a,b) \mapsto (a-b, b-a)$ hat (bei geeigneter Wahl der beiden Isomorphismen).

Betrachten wir nun die exakte Sequenz $0 \to I \to C^f_{\mathfrak{C}^4} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^2 \to 0$:
Nach Satz 3.1.0.10 ist $K_0(C^f_{\mathfrak{C}^4}) = [1]\mathbb{Z}$ und $K_1(C^f_{\mathfrak{C}^4}) = 0$. Wegen $K_0(\mathbb{C}^2) \cong$

$\mathbb{Z}^2$ und $K_1(\mathbb{C}^2) = 0$ folgt aus der induzierten exakten Folge von K-Gruppen $K_0(I) = 0$ und $K_1(I) \cong \mathbb{Z}$. Für die Index-Abbildung $\mathbb{Z}^2 \cong K_0(\mathbb{C}^2) \to K_1(I) \cong \mathbb{Z}$ gilt offensichtlich $[1,1] \mapsto 0$. Folglich hat die Abbildung die Form $(a,b) \mapsto (a-b)$ (wieder bei geeigneter Wahl der Isomorphismen).

Aus den von der exakten Leiter induzierten exakten Folgen von K-Gruppen erhalten wir nun wegen $K_0(I) = K_0(I') = 0$ und $K_1(\mathbb{C}^2) = K_1(\mathbb{C}^4) = 0$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(C^f_{\mathfrak{D}}) \arrow[r, "(\phi\vee\phi')_*"] & K_0(\mathbb{C}^2) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_*"'] & K_1(I) \oplus K_1(I') \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(C^f_{\mathfrak{D}}) \arrow[r] & 0. \\
& & K_0(\mathbb{C}^2) \oplus K_0(\mathbb{C}^2) \arrow[r] & K_1(I) \oplus K_1(I') & &
\end{tikzcd}$$

Unter den obigen Identifikationen hat die untere Abbildung die Form $((a,b),(a',b')) \mapsto ((a-b),(a'-b',b'-a'))$ und folglich die obere mittlere Abbildung die Form $(a,b) \mapsto ((a-b),(a-b,b-a))$. Es folgt $K_0(C^f_{\mathfrak{D}}) = [1]\mathbb{Z}$ und $K_1(C^f_{\mathfrak{D}}) \cong \mathbb{Z}^2$. $\square$

Eine Spiegelung

Wir betrachten nun die Spiegelung des Komplexes $\mathfrak{D}$ an der y-Achse:

3.2.7.5 Satz. *Sei $f : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ definiert durch*

$$f : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}, \qquad s_1 \leftrightarrow s_7, \quad s_2^{\pm} \leftrightarrow s_6^{\pm}, \quad s_3 \leftrightarrow s_5, \quad s_4^{\pm} \mapsto s_4^{\pm}.$$

Dann sind die K-Gruppen des verschränkten Produktes $C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $K_0(C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2) = [\frac{1+\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus [\frac{1-\sigma}{2}]\mathbb{Z}$ und $K_1(C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis: Wir betrachten den simplizialen Komplex $\mathfrak{D}$ wie zuvor als Zweipunktvereinigung der Komplexe $\mathfrak{C}^4$ und $\mathfrak{C}^8$. Definiere $g : \mathfrak{C}^4 \to \mathfrak{C}^4$ und $g' : \mathfrak{C}^8 \to \mathfrak{C}^8$ durch

$$\begin{aligned} g : \mathfrak{C}^4 \to \mathfrak{C}^4, &\qquad s_1 \mapsto s_1, \quad s_2 \leftrightarrow s_4, \quad s_3 \mapsto s_3, \\ g' : \mathfrak{C}^8 \to \mathfrak{C}^8, &\qquad s_1 \mapsto s_1, \quad s_2 \leftrightarrow s_8, \quad s_3 \leftrightarrow s_7, \quad s_4 \leftrightarrow s_6, \quad s_5 \mapsto s_5. \end{aligned}$$

Dann sind die von g^*, g'^* und f^* induzierten $\mathbb{Z}_2$-Operationen auf $C^f_{\mathfrak{C}^4}, C^f_{\mathfrak{C}^8}$ und $C^f_{\mathfrak{D}} = \left(C^f_{\mathfrak{C}^4}\right) {}_{\phi}\vee_{\phi'} \left(C^f_{\mathfrak{C}^8}\right)$ kompatibel mit den pull-back-Strukturabbildungen, und Lemma 2.3.1.3 liefert

$$C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2 \;\cong\; \left(C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes_{g^*} \mathbb{Z}_2\right) {}_{(\phi\rtimes\mathbb{Z}_2)}\vee_{(\phi'\rtimes\mathbb{Z}_2)} \left(C^f_{\mathfrak{C}^8} \rtimes_{g'^*} \mathbb{Z}_2\right).$$

Setze wieder $I = \ker\phi$ und $I' = \ker\phi'$. Betrachten wir die exakte Leiter

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (I \oplus I') \rtimes \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\Delta\rtimes\mathbb{Z}_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (I \rtimes \mathbb{Z}_2) \oplus (I' \rtimes \mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \Big(C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes \mathbb{Z}_2\Big) \oplus \Big(C^f_{\mathfrak{C}^8} \rtimes \mathbb{Z}_2\Big) \arrow[r] & (\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{Z}_2) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Die $\mathbb{Z}_2$-Operationen auf $\mathbb{C}^2$ rechts sind jeweils trivial, weil g und g' die Punkte s_1, s_3 bzw. s_1, s_5 fixieren, und ϕ bzw. ϕ' von der Inklusion gerade dieser Punkte in $\mathfrak{C}^4$ bzw. $\mathfrak{C}^8$ induziert sind.

Wir berechnen zunächst die K-Gruppen von $C^f_{\mathfrak{C}^n} \rtimes \mathbb{Z}^2$ für $n = 4, 8$:

Unter dem Isomorphismus $C^f_{\mathfrak{C}^4} \cong S\big((\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2) \,; (\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1) \,, (\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2) \big)$ aus Satz 3.1.0.9 wird die $\mathbb{Z}_2$-Wirkung von der Involution $(a,b)\star(c,d) \leftrightarrow (b,a)\star(c,d)$ von $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ induziert. Nach Lemma 2.3.1.3, 2.3.2.2 und 3.2.6.1 bestehen Isomorphismen

$$C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong S\big(A; A_{id}, A_\alpha\big) \tag{3.22}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= A_\alpha \star_B A_{id}, & B &= \mathbb{C} \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2 \cong \tfrac{1+\sigma}{2}\mathbb{C} \oplus \tfrac{1-\sigma}{2}\mathbb{C}, \\ A_\alpha &= \mathbb{C}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \cong M_2(\mathbb{C}), & A_{id} &= \mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2 \cong \tfrac{1+\sigma}{2}\mathbb{C}^2 \oplus \tfrac{1-\sigma}{2}\mathbb{C}^2, \end{aligned}$$

wobei $\alpha(a,b) = (b,a)$. Offensichtlich ist $K_1(A_{id}) = K_1(A_\alpha) = 0$. Ferner ist die von der Inklusion $B \hookrightarrow A_{id},\ a + b\sigma \mapsto (a,a) + (b,b)\sigma$, induzierte Abbildung $K_0(B) \to K_0(A_{id})$ injektiv. Theorem 2.2.0.20 liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to K_1(A) \to K_0(B) \to K_0(A_\alpha) \oplus K_0(A_{id}) \xrightarrow{\iota_1} K_0(A) \to 0,$$

und Mayer-Vietoris 2.2.0.17 zu (3.22) die exakte Sequenz

$$0 \to K_0(C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes \mathbb{Z}_2) \to K_0(A_\alpha) \oplus K_0(A_{id}) \xrightarrow{\iota_2} K_0(A) \to K_1(C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes \mathbb{Z}_2) \to 0.$$

Da die Abbildungen ι_1 und ι_2 übereinstimmen und $K_1(A) = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} & K_0(C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes \mathbb{Z}_2) \cong K_0(B) = [\tfrac{1+\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus [\tfrac{1-\sigma}{2}]\mathbb{Z} \\ \text{und}\quad & K_1(C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes \mathbb{Z}_2) = 0. \end{aligned}$$

In der von der exakten Sequenz

$$0 \to I \rtimes \mathbb{Z}_2 \to C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\phi\rtimes\mathbb{Z}_2} \mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

(Def. von ϕ siehe Satz 3.2.7.3) induzierten Folge von K-Gruppen ist $K_1(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) = 0$ und $K_0(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2)$ frei erzeugt von den vier Elementen $[p_{1,2}\frac{1\pm\sigma}{2}]$. Folglich ist die Abbildung

$$(\phi \rtimes \mathbb{Z}_2)_* : K_0(C^f_{\mathfrak{C}^4} \rtimes_{g^*} \mathbb{Z}_2) \to K_0(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2)$$

injektiv. Somit ist $K_0(I \rtimes \mathbb{Z}_2) = 0, K_1(I \rtimes \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}^2$ und

$$\ker\big(K_0(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) \to K_1(I \rtimes \mathbb{Z}_2)\big) \;=\; [\tfrac{1+\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus [\tfrac{1-\sigma}{2}]\mathbb{Z}. \tag{3.23}$$

Für $n = 8$ nutzen wir den Isomorphismus $C^f_{\mathfrak{C}^8} \cong C(S^1)$: In der exakten Sequenz

$$0 \to I' \rtimes \mathbb{Z}_2 \to C(S^1) \rtimes_{g'^*} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\phi' \rtimes \mathbb{Z}_2} \mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

operiert $\mathbb{Z}_2$ auf $I' \cong S\mathbb{C} \oplus S\mathbb{C}$ durch Vertauschung der Summanden, folglich ist (mit $\alpha(a,b) := (b,a)$) $(S\mathbb{C} \oplus S\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong S(\mathbb{C}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2) \cong SM_2(\mathbb{C})$ und somit $K_0(I') = 0$ sowie $K_1(I') \cong \mathbb{Z}$.

Betrachten wir nun das von der obigen exakten Leiter induzierte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes \mathbb{Z}_2) \arrow[r] & K_0(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Delta"] & K_1(I \rtimes \mathbb{Z}_2) \oplus K_1(I' \rtimes \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes \mathbb{Z}_2) \arrow[r] & 0. \\
& & K_0(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2)^2 \arrow[r] & K_1(I \rtimes \mathbb{Z}_2) \oplus K_1(I' \rtimes \mathbb{Z}_2) & &
\end{tikzcd}$$

Die Elemente $[\frac{1\pm\sigma}{2}] \in K_0(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2)$ liften trivial nach $C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes \mathbb{Z}_2$ und gehören folglich zum Kern von δ. Andererseits zeigen die Faktorisierung über das Quadrat und (3.23), daß sie bereits ganz $\ker \delta$ erzeugen. Folglich ist $K_0(C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes \mathbb{Z}_2)$ frei erzeugt von $[\frac{1\pm\sigma}{2}]$. Die Behauptung über $K_1(C^f_{\mathfrak{D}} \rtimes \mathbb{Z}_2)$ folgt nun aus $K_0(\mathbb{C}^2 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}^4$ und $K_1(I \rtimes \mathbb{Z}_2) \oplus K_1(I' \rtimes \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}^3$ (da der Kokern der unteren Abbildung torsionsfrei ist, ist auch der Kokern von δ torsionsfrei). □

3.2.8 Beispiel E

Simplizialer Komplex $\mathfrak{E}$:

Ecken:

$$s_1^\pm, s_2^\pm, s_3^\pm$$

Kanten:

$$\{s_i^+, s_j^-\}, \quad |i-j| \le 1.$$

$$\begin{array}{ccccc}
s_1^+ & — & s_2^- & — & s_3^+ \\
| & & | & & | \\
s_1^- & — & s_2^+ & — & s_3^-
\end{array}$$

Assoziierte Algebra $C^f_{\mathfrak{E}}$:

universelle unitale C^*-Algebra mit positiven Erzeugern

$$h_1^\pm, h_2^\pm, h_3^\pm$$

und den Relationen

$$h_i^\pm h_j^\pm = 0, i \neq j, \tag{3.24}$$

$$h_1^\pm h_3^\mp = 0, \tag{3.25}$$

$$\sum_i (h_i^+ + h_i^-) = 1. \tag{3.26}$$

(hierbei ist die Wahl von + oder - in(3.24,3.25) jeweils nicht unabhängig voneinander zu treffen)

3.2.8.1 Satz. *Mit* $V^0_{\mathfrak{C}} = \{s_1^+, s_2^+, s_3^+\}$ *und* $V^1_{\mathfrak{C}} = \{s_1^-, s_2^-, s_3^-\}$ *ist der Komplex* $\mathfrak{C}$ *bipartit und* $C^f_{\mathfrak{C}} \cong S\big(\mathcal{P}_{\mathfrak{C}}; \mathcal{P}^0_{\mathfrak{C}}, \mathcal{P}^1_{\mathfrak{C}} 1\big)$.

Setze $A := (\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}$. *Bezeichne* p_i *bzw.* q_i *die* i*-te kanonische Projektion in den Unteralgebren* $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}1$ *bzw.* $\mathbb{C}1 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$ *von* A, $p_3 = q_3$ *die Projektion* $(0,1)$, *und schließlich* $e_j \in \mathbb{C}^3$ *die* j*-te kanonische Projektion. Definiere* $\phi^+, \phi^- : A \to \mathbb{C}^3$ *durch*

$$\phi^+ : \; p_i, q_i \mapsto e_i, \qquad \phi^- : \; p_i, q_i \mapsto e_{4-i}, \quad i = 1,2,3, \tag{3.27}$$

und $\psi^+, \psi^- : \mathcal{P}_{\mathfrak{C}} \to A$ *durch*

$$\psi^+ : \; p_{s_i^+} \mapsto p_i, \;\; p_{s_i^-} \mapsto q_i, \qquad \psi^- : \; p_{s_i^+} \mapsto p_{4-i}, \;\; p_{s_i^-} \mapsto q_{4-i}, \quad i = 1,2,3. \tag{3.28}$$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "\phi^+"] & \\
\mathcal{P}_{\mathfrak{C}} \arrow[urr, bend left, "\psi^+"] \arrow[drr, bend right, "\psi^-"'] \arrow[r, dashed, "\psi"] & A \,{}_{\phi^+}\!\vee_{\phi^-} A \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, "\phi"] & & \mathbb{C}^3, \\
 & & A \arrow[ur, "\phi^-"'] &
\end{tikzcd}, \qquad \textit{mit} \quad \phi = \phi^+ \vee \phi^-,$$

und der induzierte Homomorphismus $\psi : \mathcal{P}_{\mathfrak{C}} \to A \,{}_{\phi^+}\!\vee_{\phi^-} A$,

$$p_i^+ := p_{s_i^+} \mapsto (p_i, p_{4-i}), \quad p_i^- := p_{s_i^-} \mapsto (q_i, q_{4-i}), \quad i = 1,2,3, \tag{3.29}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt aus Satz 3.2.1.3.

Die Identität $\phi^+ \circ \psi^+ = \phi^- \circ \psi^-$ ist offensichtlich und zeigt die Existenz von ψ.

Die Injektivität von ψ folgt daraus, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : \mathcal{P}_{\mathfrak{C}} \to B(H)$ über ψ^+ oder ψ^- und somit über ψ faktorisiert:
Setze $p_i^\pm := p_{s_i^\pm} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{C}}$, $i = 1,2,3$. Das Element

$$z_i := (p_i^+ - p_i^-)^2 = p_i^+ + p_i^- - p_i^+ p_i^- - p_i^- p_i^+ \quad \in \quad \mathcal{P}_{\mathfrak{C}}$$

ist für $i = 1$ und $i = 3$ zentral wegen

$$p_i^+ z_i = p_i^+ - p_i^+ p_i^- p_i^+ = z_i p_i^+, \quad p_{4-i}^+ z_i = 0 = z_i p_{4-i}^+, \quad p_2^+ = 1 - (p_1^+ + p_3^+)$$

und analogen Rechnungen für $[p_j^-, z_i]$, $j = 1,2,3$. Folglich sind $\rho(z_1)$ und $\rho(z_3)$ skalar. Wegen $z_1 z_3 = 0$ gilt $\rho(z_1) = 0$ oder $\rho(z_3) = 0$. Im ersten Fall folgt $\rho(p_1^+) = \rho(p_1^-)$ und $\rho(p_2^\pm)\rho(p_1^\mp) = 0$, so daß ρ über ψ^- faktorisiert. Im zweiten Fall faktorisiert ρ über ψ^+.

Für die Surjektivität von ψ sind die – offensichtlich gegebene – Surjektivität von $\phi \circ \psi$ und die Inklusion $\ker \phi \subset \psi(\ker(\phi \circ \psi))$ hinreichend. Für das zweite genügt es wegen $\ker \phi = \ker \phi^+ \oplus \ker \phi^-$ und der Beziehung

$$\psi(\ker(\phi \circ \psi)) \supset \psi^+(\ker \psi^-) \oplus \psi^-(\ker \psi^+)$$

sowie der $\pm$-Symmetrie, die Inklusion $\ker \phi^+ \subset \psi^+(\ker \psi^-)$ zu zeigen. Unter dem Isomorphismus

$$A \xrightarrow{\sim} S\big(M_2(\mathbb{C}); \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2\big) \oplus \mathbb{C}, \tag{3.30}$$

$$\begin{array}{lll} p_1 \mapsto \left(\begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}, 0\right), & q_1 \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, 0\right), & \begin{array}{l} c(t) = \cos(\pi t/2), \\ s(t) = \sin(\pi t/2), \end{array} \\ p_2 \mapsto (1 - p_1, 0), & q_2 \mapsto (1 - q_1, 0), & p_3, q_3 \mapsto (0, 1), \end{array}$$

aus Lemma 2.1.3.5 entspricht ϕ^+ der Auswertung an der Stelle 0. Ein einfaches Stone-Weierstraß-Argument zeigt, daß die Elemente (vgl. (3.28) und (3.30))

$$\begin{array}{ll} \psi^+(p_1^- p_2^+ p_1^-) \equiv \left(\begin{pmatrix} 1 - c^2 & \\ & 0 \end{pmatrix}, 0\right), & \psi^+(p_2^- p_1^+ p_2^-) \equiv \left(\begin{pmatrix} 0 & \\ & s^2 \end{pmatrix}, 0\right), \\ \psi^+(p_1^- p_1^+ p_2^-) \equiv \left(\begin{pmatrix} 0 & cs \\ & 0 \end{pmatrix}, 0\right), & \psi^+(p_2^- p_1^+ p_1^-) \equiv \left(\begin{pmatrix} 0 & \\ cs & 0 \end{pmatrix}, 0\right) \end{array}$$

bereits $\ker \phi^+ \equiv S(M_2(\mathbb{C}); 0, \mathbb{C}^2) \oplus 0$ als Algebra erzeugen. Wegen $\psi^-(p_2^\pm p_1^\mp) = 0$ verschwindet ψ^- auf allen links stehenden Elementen von $\mathcal{P}_\mathfrak{E}$. □

3.2.8.2 Satz. *Es gilt* $K_0(C^f_\mathfrak{E}) = [1]\mathbb{Z}$ *und* $K_1(C^f_\mathfrak{E}) = 0$.

Beweis: Wir berechnen zunächst die K-Gruppen der Algebra $\mathcal{P}_\mathfrak{E} \cong A\,{}_{\phi^+}\!\vee_{\phi^-} A$: Definiere $\phi^\circ : A \to \mathbb{C}^2$ durch

$$p_1, q_2 \mapsto (0, 1), \qquad p_2, q_1 \mapsto (1, 0), \qquad p_3, q_3 \mapsto 0.$$

Unter dem Isomorphismus (3.30) entspricht ϕ° der Auswertung an der Stelle 1, gefolgt von der Projektion auf die erste Komponente, und ϕ^+ der Auswertung an der Stelle 0. Folglich ist $\ker \phi^+ \cap \ker \phi^\circ \equiv SM_2(\mathbb{C})$, und die Indexabbildung in der exakten Sequenz

$$0 \to SM_2(\mathbb{C}) \to A \xrightarrow{\phi^+ \oplus \phi^\circ} \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2 \to 0$$

hat bezüglich der kanonischen Isomorphismen $K_0(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{Z}^n$ nach Mayer-Vietoris die Form

$$K_0(\mathbb{C}^3) \oplus K_0(\mathbb{C}^2) \ni ((m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2)) \mapsto \\ (n_1 + n_2) - (m_1 + m_2) \in K_1(SM_2(\mathbb{C})) \cong K_0(\mathbb{C}).$$

Die Abbildung

$$\Phi : A \vee A \to \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2, \quad (a, b) \mapsto (\phi^\circ(a), \phi^+(a), \phi^\circ(b)),$$

liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to (SM_2(\mathbb{C}))^2 \to A \vee A \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2 \to 0.$$

Die zugehörige Folge von K-Gruppen liefert wegen $K_1(\mathbb{C}^n) = 0 = K_0(SM_2(\mathbb{C}))$ die exakte Sequenz

$$0 \to K_0(A \vee A) \xrightarrow{\Phi_*} K_0(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2) \xrightarrow{\delta} K_0(M_2(\mathbb{C}))^2 \to K_1(A \vee A) \to 0.$$

Nach obiger Bemerkung hat δ (wieder bezüglich der kanonischen Isomorphismen $K_0(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{Z}^n$) die Form

$$\begin{pmatrix} k_1 & l_1 & \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ & l_3 & m_3 \end{pmatrix} :\equiv ((k_1, k_2), (l_1, l_2, l_3), (m_3, m_2)) \\ \mapsto ((l_1 + l_2) - (k_1 + k_2), (m_2 + m_3) - (l_2 + l_3)).$$

Somit ist $K_1(A \vee A) = 0$. Die Bilder der folgenden Elemente unter der Abbildung Φ (vgl. (3.29) und (3.30)),

$$p_1^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2^+ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_3^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$p_1^- \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2^- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_3^- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

erzeugen den Kern von δ. Folglich ist in der Mayer-Vietoris-Sequenz

$$0 \to K_0(C^f_{\mathfrak{E}}) \to K_0(\langle p_1^+, p_2^+, p_3^+ \rangle) \oplus K_0(\langle p_1^-, p_2^-, p_3^- \rangle) \to K_0(A \vee A) \to K_1(C^f_{\mathfrak{E}}) \to 0$$

der Algebra

$$C^f_{\mathfrak{E}} \cong S\big((A \vee A) ; \langle p_1^+, p_2^+, p_3^+ \rangle, \langle p_1^-, p_2^-, p_3^- \rangle \big)$$

die mittlere Abbildung surjektiv, und man sieht leicht daß ihr Kern von [1] erzeugt wird. $\square$

Eine Spiegelung

3.2.8.3 Satz. *Sei $f : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ definiert durch $s_1^\pm \leftrightarrow s_3^\pm$ und $s_2^\pm \mapsto s_2^\pm$. Dann ist $K_0(C_\mathfrak{E} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2) = [\frac{1+\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus [\frac{1-\sigma}{2}]\mathbb{Z}$ und $K_1(C_\mathfrak{E} \rtimes_{f^*} \mathbb{Z}_2) = 0$.*

Beweis: Die $\mathbb{Z}_2$-Operation auf $C_\mathfrak{E}^f$ wird von dem Automorphismus $p_i^\pm \leftrightarrow p_{4-i}^\pm$ von $\mathcal{P}_\mathfrak{E}$ induziert. Unter der Identifikation $\mathcal{P}_\mathfrak{E} \cong A\ {}_{\phi^+}\!\vee_{\phi^-} A$ entspricht dies

$$\begin{aligned} (p_i, p_{4-i}) \equiv p_i^+ &\quad\leftrightarrow\quad p_{4-i}^+ \equiv (p_{4-i}, p_i) \\ (q_i, q_{4-i}) \equiv p_i^- &\quad\leftrightarrow\quad p_{4-i}^- \equiv (q_{4-i}, q_i), \end{aligned}$$

also der Vertauschung der Summanden. Nach Lemma 3.2.6.1 liefert die Vorschrift $(a,b) + (c,d)\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ einen Isomorphismus

$$B := (A \vee A) \rtimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \mid \phi^+(a) = \phi^-(b), \phi^+(c) = \phi^-(d) \right\}. \tag{3.31}$$

Unter dem Isomorphismus $A \cong S\big(M_2(\mathbb{C}); \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2\big) \oplus \mathbb{C}$ (vgl. (3.30)) entsprechen ϕ^+ und ϕ^- den Abbildungen $\phi^+ : (f, \lambda) \mapsto (a, b, \lambda)$ und $\phi^- : (f, \lambda) \mapsto (\lambda, b, a)$, wobei $\left(\begin{smallmatrix} a & \\ & b \end{smallmatrix}\right) = f(0)$. Bezeichne $\pi : A \to S\big(M_2(\mathbb{C}); \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2\big)$ die Projektion. Dann erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} B &\xrightarrow{\sim} S\big(M_2(M_2(\mathbb{C})); C^0, C^1\big), \\ (a,b) + (c,d)\sigma &\mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \pi(a) & \pi(c) \\ \pi(d) & \pi(b) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

mit $C^1 = M_2(\mathbb{C}^2)$ (wobei $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow M_2(\mathbb{C})$ via $(a,b) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & \\ & b \end{smallmatrix}\right)$) und

$$C^0 = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & \\ & a_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_0 & \\ & c_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_2 & \\ & c_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_2 & \\ & a_1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \mid a_i, c_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Die Mayer-Vietoris-Sequenz zu (3.32) hat wegen $K_1(M_4(\mathbb{C})) = K_1(C^0) = K_1(C^1) = 0$ die Gestalt

$$0 \to K_0(B) \to K_0(C^0) \oplus K_0(C^1) \to K_0(M_4(\mathbb{C})) \to K_1(B) \to 0.$$

Unter den kanonischen Identifikationen $K_0(C^1) = K_0(M_2(\mathbb{C}^2)) \cong K_0(\mathbb{C}^2) \cong \mathbb{Z}^2$ und $K_0(C^0) \cong K_0(M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2) \cong \mathbb{Z}^3$, letztere induziert von

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & \\ & a_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_0 & \\ & c_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_2 & \\ & c_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_2 & \\ & a_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}, \frac{a_1 + c_1}{2}, \frac{a_1 - c_1}{2} \right),$$

hat die Abbildung $i_{1*} - i_{0*} : K_0(C^0) \oplus K_0(C^1) \to K_0(M_4(\mathbb{C}))$ die Form

$$((m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2)) \;\mapsto\; (n_1 + n_2) - (m_1 + m_2 + m_3).$$

Folglich ist $K_1(B) = 0$ und $K_0(B) \cong \mathbb{Z}^4$.

Betrachten wir nun die Unteralgebren

$$\begin{aligned} B^0 &:= \langle (p_1, p_3), (p_2, p_2), (p_3, p_1) \rangle \rtimes \mathbb{Z}_2 \equiv \langle p_1^+, p_2^+, p_3^+ \rangle \rtimes \mathbb{Z}_2, \\ B^1 &:= \langle (q_1, q_3), (q_2, q_2), (q_3, q_1) \rangle \rtimes \mathbb{Z}_2 \equiv \langle p_1^-, p_2^-, p_3^- \rangle \rtimes \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

von B. Da die $\mathbb{Z}_2$-Wirkung $p_1^\pm$ mit $p_3^\pm$ vertauscht und $p_2^\pm$ fixiert, ist

$$\begin{aligned} K_0(B^0) &= [p_1^+]\mathbb{Z}_2 \oplus [p_2^+ \tfrac{1+\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus [p_2^+ \tfrac{1-\sigma}{2}]\mathbb{Z}, \\ K_0(B^1) &= [p_1^-]\mathbb{Z}_2 \oplus [p_2^- \tfrac{1+\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus [p_2^- \tfrac{1-\sigma}{2}]\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Unter der von den Auswertungen an der Stelle 0 und 1 induzierten Abbildung $K_0(B) \to K_0(C^0) \oplus K_0(C^1)$ gehen diese Erzeuger auf die Elemente (vgl. (3.30))

$$\begin{aligned}
[p_1^+] \equiv [p_1, p_3] &\mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right] \equiv ((1,0,0),(0,1)), \\
[p_1^-] \equiv [q_1, q_3] &\mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right] \equiv ((1,0,0),(1,0)), \\
[p_2^+ \tfrac{1\pm\sigma}{2}] \equiv [(p_2, p_2)\tfrac{1\pm\sigma}{2}] &\mapsto \left[\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & 1 & & \pm 1 \\ 0 & & 0 & \\ & \pm 1 & & 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \pm 1 & \\ & 0 & & 0 \\ \pm 1 & & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} \right] \equiv \begin{cases} ((0,1,0),(1,0)) & \text{für } +, \\ ((0,0,1),(1,0)) & \text{für } -, \end{cases} \\
[p_2^- \tfrac{1\pm\sigma}{2}] \equiv [(q_2, q_2)\tfrac{1\pm\sigma}{2}] &\mapsto \left[\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & 1 & & \pm 1 \\ 0 & & 0 & \\ & \pm 1 & & 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & 1 & & \pm 1 \\ 0 & & 0 & \\ & \pm 1 & & 1 \end{pmatrix} \right] \equiv \begin{cases} ((0,1,0),(0,1)) & \text{für } +, \\ ((0,0,1),(0,1)) & \text{für } -. \end{cases}
\end{aligned}$$

Folglich erzeugen die obigen Bilder den Kern der Abbildung $(i_{1*} - i_{0*}) : K_0(C^0 \oplus C^1) \to K_0(M_4(\mathbb{C}))$ und somit $K_0(B)$.

Die Mayer-Vietoris-Sequenz zu $C^f_{\mathfrak{E}} \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong S\big(B; B^0, B^1\big)$ hat wegen $K_1(B^0) = K_1(B^1) = K_1(B) = 0$ die Gestalt

$$0 \to K_0(C^f_{\mathfrak{E}} \rtimes \mathbb{Z}_2) \to K_0(B^0 \oplus B^1) \to K_0(B) \to K_1(C^f_{\mathfrak{E}} \rtimes \mathbb{Z}_2) \to 0.$$

Nach obigem ist $K_1(C^f_{\mathfrak{E}} \rtimes \mathbb{Z}_2) = 0$ und $K_0(C^f_{\mathfrak{E}} \rtimes \mathbb{Z}_2) = [\frac{1+\sigma}{2}]\mathbb{Z} \oplus [\frac{1-\sigma}{2}]\mathbb{Z}$. $\square$

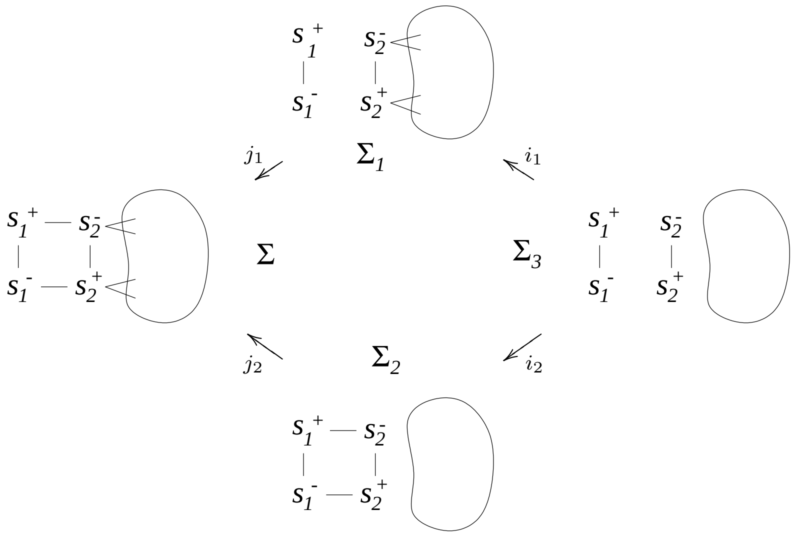
3.2.9 Verallgemeinerung – bipartite Komplexe mit Henkeln

Im folgenden behandeln wir den einfachsten Fall einer nichtseparierten Mehrpunktvereinigung bipartiter Komplexe – das “Ankleben eines Henkels”.

3.2.9.1 Satz. *Sei Σ ein bipartiter Komplex mit vier Ecken $s_1^+, s_2^+, s_1^-, s_2^- \in V_\Sigma$, so daß $\{s_2^+, s_2^-\} \in \Sigma$ und $N_\Sigma(s_1^\pm) = \{s_1^\mp, s_2^\mp\}$. Setze*

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{\{s_1^+, s_2^-\}, \{s_2^+, s_1^-\}\}, & \Gamma_2 &:= \{\, \{s_2^\pm, s\} \in \Sigma \mid s \neq s_2^\mp, s_1^\mp\}, \\ \Gamma_3 &:= \Gamma_1 \cup \Gamma_2, & \Sigma_i &:= \Sigma \setminus \Gamma_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Dann ist das von den Inklusionen



induzierte Diagramm

$$\begin{tikzcd} & C^f_{\Sigma_1} \arrow[dr, "i_1^*"] & \\ C^f_\Sigma \arrow[ur, "j_1^*"] \arrow[dr, "j_2^*"'] & & C^f_{\Sigma_3} \\ & C^f_{\Sigma_2} \arrow[ur, "i_2^*"'] & \end{tikzcd} \tag{3.33}$$

ein pull-back, d.h. das Diagramm kommutiert, und der von j_1^* und j_2^* induzierte Homomorphismus $j^* : C^f_\Sigma \;\to\; \left(C^f_{\Sigma_1}\right) {}_{i_1^*}\!\vee_{i_2^*} \left(C^f_{\Sigma_2}\right)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $V_\Sigma = V_\Sigma^0 \amalg V_\Sigma^1$ eine Partition von Σ mit $s_1^+ \in V_\Sigma^0$ und $s_1^- \in V_\Sigma^1$. Nach Satz 3.2.1.3 genügt es zu zeigen, daß das von den Inklusionen induzierte Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}_{\Sigma_1} \arrow[dr, "i_1^*"] & \\ \mathcal{P}_\Sigma \arrow[ur, "j_1^*"] \arrow[dr, "j_2^*"'] & & \mathcal{P}_{\Sigma_3} \\ & \mathcal{P}_{\Sigma_2} \arrow[ur, "i_2^*"'] & \end{tikzcd} \tag{3.34}$$

ein pull-back ist.

Wir zeigen zunächst, daß das Bild von $j^* : \mathcal{P}_\Sigma \to \mathcal{P}_{\Sigma_1} \oplus \mathcal{P}_{\Sigma_2}$ ganz $(\mathcal{P}_{\Sigma_1})\ {}_{i_1^*}\!\vee_{i_2^*} (\mathcal{P}_{\Sigma_2})$ ist:
Setze $i^* := i_1^* \vee i_2^* : (\mathcal{P}_{\Sigma_1})\ {}_{i_1^*}\!\vee_{i_2^*} (\mathcal{P}_{\Sigma_2}) \to \mathcal{P}_{\Sigma_3}$ sowie $J_{1,2} := \ker j_{1,2}^*$ und $J_3 := \ker(i^* \circ j^*)$. Das Diagramm (3.34) hat dann die Form

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}_\Sigma/J_1 \arrow[dr, "i_1^*"] & \\ \mathcal{P}_\Sigma \arrow[ur, "j_1^*"] \arrow[dr, "j_2^*"'] & & \mathcal{P}_\Sigma/J_3. \\ & \mathcal{P}_\Sigma/J_2 \arrow[ur, "i_2^*"'] & \end{tikzcd}$$

Offensichtlich ist $i^* \circ j^*$ surjektiv. Daher genügt es, die Inklusion $\ker i^* \subset j^*(J_3)$ zu zeigen. Wegen $\ker i^* \;=\; \ker i_1^* \oplus \ker i_2^*$ und

$$j^*(J_3) \;=\; j_1^*(J_3) \oplus j_2^*(J_3) \;\supset\; j_1^*(J_2) \oplus j_2^*(J_1)$$

genügt es, die Inklusionen $\ker i_1^* \subset j_1^*(J_2)$ und $\ker i_2^* \subset j_2^*(J_1)$ zu zeigen. Nach Definition gilt für jede Menge $\Gamma \subset \Sigma$ von Kanten allgemein

$$\ker\big(\mathcal{P}_\Sigma \to \mathcal{P}_{\Sigma\setminus\Gamma}\big) \;=\; \big(p_s p_{s'},\ p_{s'} p_s \mid \{s, s'\} \in \Gamma\big).$$

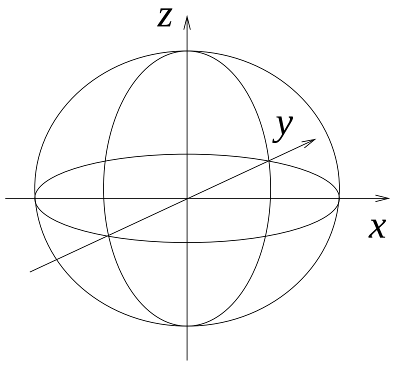
Angewendet auf $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ erhalten wir $J_3 = J_1 + J_2$ und somit

$$j_1^*(J_2) = J_3/J_1 = \ker i_1^*, \qquad\qquad j_2^*(J_1) = J_3/J_2 = \ker i_2^*.$$

Wir zeigen nun, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : \mathcal{P}_\Sigma \to B(H)$ über j_1^* oder j_2^* und somit über j^* faktorisiert, woraus die Injektivität von j^* folgt:
Setze $p_i := p_{s_i^+}$ und $q_i := p_{s_i^-}$, $i = 1, 2$. Das Element $z := (p_1 - q_1)^2$ kommutiert in $\mathcal{P}_\Sigma$ mit p_1 und q_1 und trivialerweise mit allen anderen $p_s, s \in V_\Sigma \setminus \{s_2^+, s_2^-\}$. Wegen $\sum_{s \in V_\Sigma^0} p_s = 1$ kommutiert z auch mit p_2 und analog mit q_2. Folglich ist z zentral und $\rho(z)$ skalar.
Im Fall $\rho(z) = 0$ folgt $\rho(p_1) = \rho(q_1)$ und somit $\rho(p_1 q_2) = \rho(q_1 q_2) = 0$ sowie $\rho(q_1 p_2) = 0$. Folglich ist $J_1 \subset \ker\rho$, und ρ faktorisiert über j_1^*.
Im Fall $\rho(z) \neq 0$ folgt für alle $s \in V_\Sigma \setminus \{s_1^+, s_2^+, s_1^-, s_2^-\}$ aus $p_s z = 0$ sofort $\rho(p_s) = 0$, und somit faktorisiert ρ über j_2^*. $\square$

3.2.10 Beispiel F

Kommutatives Bild:



Bezeichne $\mathcal{C}_F$ die universelle unitale C^*-Algebra mit selbstadjungierten Erzeugern

$$x, y, z$$

und den Relationen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, & (3.35)\\ a_1 \cdot \ldots \cdot a_n &= 0 & (3.36) \end{aligned}$$
$$\text{falls } \{a_1, \ldots, a_n\} = \{x, y, z\}.$$

3.2.10.1 Satz. *Setze* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. *Sei* $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Omega^3$ *mit*

$$\Omega^i = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3_+ \mid \lambda_i = 0, \sum \lambda_j^2 = 1\}.$$

Bezeichne $\pi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *die* i*-te Koordinatenfunktion* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto \lambda_i$. *Schließlich sei* u_i *die* i*-te kanonische Symmetrie in* $\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$. *Dann definiert die Vorschrift*

$$x \mapsto \pi_1 u_1, \qquad y \mapsto \pi_2 u_2, \qquad z \mapsto \pi_3 u_3 \tag{3.37}$$

einen Isomorphismus

$$\mathcal{C}_F \;\cong\; \{\, f : \Omega \to \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \;\mid\; f|_{\Omega^i} \subset C^i \text{ für } i = 1, 2, 3 \,\}$$

mit $C^i = \langle u_j | j \neq i \rangle \subset \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$.

Beweis: Existenz des $*$-Homomorphismus folgt aus der universellen Eigenschaft von $\mathcal{C}_F$. Surjektivität zeigt man mit einem leichten Stone-Weierstraß-Argument. Injektivität folgt daraus, daß jede irreduzible Darstellung $\rho : \mathcal{C}_F \to B(H)$ über den Homomorphismus faktorisiert: Aus (3.35) folgt

$$x(y^2 + z^2) = (y^2 + z^2)x,$$

und nach Multiplikation mit y^2 von rechts beziehungsweise links folgt wegen Beziehung (3.36)

$$xy^4 = y^2 x y^2 = y^4 x.$$

Analoge Rechnungen zeigen, daß x^4, y^4 und z^4 zentral sind. Demzufolge ist

$$\rho(x) = rU, \quad \rho(y) = sV, \quad \rho(z) = tW$$

für Skalare $r, s, t \in [0,1]$ mit $r^2 + s^2 + t^2 = 1$ und Symmetrien U, V, W. Wegen $0 = \rho(xyz) = rstUVW$ muß $rst = 0$ sein. Folglich faktorisiert ρ wie behauptet. $\square$

3.2.10.2 Satz. *Es gilt* $K_0(\mathcal{C}_F) = [1]\mathbb{Z}$ *und* $K_1(\mathcal{C}_F) \cong \mathbb{Z}^4$.

Beweis: Die Auswertungen ev_1, ev_2 und ev_3 an den 3 Einheitsvektoren liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to SC^1 \oplus SC^2 \oplus SC^3 \to \mathcal{C}_F \xrightarrow{ev_1 \oplus ev_2 \oplus ev_3} \langle u_1\rangle \oplus \langle u_2\rangle \oplus \langle u_3\rangle \to 0,$$

und diese liefert eine 6-Term-Folge von K-Gruppen, deren interessanter Teil die Form

$$0 \to K_0(\mathcal{C}_F) \to K_0(\oplus_i \langle u_i\rangle) \to K_0(\oplus_j C^j) \to K_1(\mathcal{C}_F) \to 0$$

hat. Unter den Identifikationen

$$\begin{array}{rclr} K_0(\langle u_i\rangle) & = & [\frac{1+u_i}{2}]\mathbb{Z} \oplus [1]\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}^2, & K_1(\langle u_i\rangle) = 0, \\ K_0(C^j) & = & [\frac{1+u_{j+1}}{2}]\mathbb{Z} \oplus [\frac{1+u_{j+2}}{2}]\mathbb{Z} \oplus [1]\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}^3, & K_1(C^j) = 0 \end{array}$$

(wobei $u_4 := u_1$ und $u_5 := u_2$ gesetzt wurde) hat die mittlere Abbildung nach Mayer-Vietoris die Form

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}^2 & \\ \oplus & & \oplus \\ \mathbb{Z}^2 & \oplus & \mathbb{Z}^2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \oplus & \mathbb{Z}^3 \\ \oplus & & \oplus \\ & \mathbb{Z}^3 & \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(a_1, b_1)} \\ (a_2, b_2) & (a_3, b_3) \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{cc} (a_2, -a_1, b_2 - b_1) & (a_1, -a_3, b_1 - b_3) \\ \multicolumn{2}{c}{(a_3, -a_2, b_3 - b_2).} \end{array}$$

Folglich ist ihr Kern frei erzeugt von $((0,1),(0,1),(0,1))$, und der Kokern isomorph zu $\mathbb{Z}^4$. $\square$

Eine Drehung mit Periode 3

3.2.10.3 Satz. *Die Vorschrift* $x \mapsto y,\ y \mapsto z,\ z \mapsto x$ *definiert einen Automorphismus* ϕ *von* $\mathcal{C}_F$ *der Ordnung 3. Die* K*-Gruppen des verschränkten Produktes* $\mathcal{C}_F \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3$ *sind* $K_0(\mathcal{C}_F \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3) = [1]\mathbb{Z}$ *und* $K_1(\mathcal{C}_F \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}^2$.

Beweis: Setze $B := \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2$. Unter dem Isomorphismus (3.37) aus Satz 3.2.10.1 entspricht ϕ der Abbildung $f \mapsto \alpha \circ f \circ \beta$ mit

$$\begin{array}{lll} & \alpha : B \to B, & a \star b \star c \mapsto c \star a \star b \\ \text{und} & \beta : \Omega \to \Omega, & (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1). \end{array}$$

Sei $\xi = \exp(2\pi i/3)$ und bezeichne $(\mathcal{C}_F)_j$ den Eigenraum von ϕ zum Eigenwert ξ^j. Offensichtlich ist jede Funktion $f \in (\mathcal{C}_F)_j$ durch ihre Restriktion auf Ω^3 eindeutig bestimmt und genügt der Gleichung

$$\xi^j f(0,1,0) = (\phi f)(0,1,0) = \alpha(f(\beta(0,1,0))) = \alpha(f(1,0,0)).$$

Folglich liefert der Isomorphismus $\mathcal{C}_F \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3 \cong ((\mathcal{C}_F)_{j-i})_{i,j}$ aus Lemma 2.3.2.2, gefolgt von der Restriktion auf $\Omega^3 \cong [0,1]$, einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_F \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3 \quad &\xrightarrow{\sim} \quad \{ \, (f_{i,j})_{i,j} : [0,1] \to M_3(C^3) \mid f_{i,j}(0) \in \langle u_1 \rangle, \; f_{i,j}(1) = \xi^{i-j}\alpha(f_{i,j}(0)) \, \} \\ &= \quad \{ \, F : [0,1] \to M_3(C^3) \mid F(0) \in M_3(\langle u_1 \rangle), \; F(1) = U\alpha(F(0))U^* \, \} \\ =: A & \end{aligned}$$

mit $U = \operatorname{diag}(1, \xi, \xi^2)$. Setze $D = M_3\big(S\big(C^3; \langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle\big)\big)$. Die Auswertung an der Stelle 0 und 1 liefert eine exakte Leiter

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S(M_3(C^3)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d] & M_3(\langle u_1 \rangle) \arrow[r] \arrow[d, "id \oplus (ad\, U) \circ \alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S(M_3(C^3)) \arrow[r] & D \arrow[r] & M_3(\langle u_1 \rangle) \oplus M_3(\langle u_2 \rangle) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Die zugehörige Folge von K-Gruppen (für die untere Zeile eine Mayer-Vietoris-Sequenz) liefert wegen $K_1(M_3(\langle u_1 \rangle)) \cong K_1(\mathbb{C}^2) = 0$ und $K_1(M_3(C^3)) \cong K_1(\mathbb{C}^2 \star_{\mathbb{C}1} \mathbb{C}^2) = 0$ sowie $(ad\, U)_* = id$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(\langle u_1 \rangle) \arrow[r] \arrow[d, "id \oplus \alpha_*"'] & K_0(C^3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(A) \arrow[r] & 0 \\ & & K_0(\langle u_1 \rangle) \oplus K_0(\langle u_2 \rangle) \arrow[r, "i_{1*} - i_{0*}"'] & K_0(C^3) & & \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\iota := (i_{1*} - i_{0*}) \circ (id \oplus \alpha_*)$ sendet die beiden Erzeuger $[\frac{1+u_1}{2}]$ und $[1]$ von $K_0(\langle u_1 \rangle)$ auf $[\frac{1+u_2}{2}] - [\frac{1+u_1}{2}]$ bzw. $[1] - [1] = 0$. Somit ist $K_0(A) = \ker \iota = [1]\mathbb{Z}$, und wegen $K_0(C^3) = [\frac{1+u_1}{2}]\mathbb{Z} \oplus [\frac{1+u_2}{2}]\mathbb{Z} \oplus [1]\mathbb{Z}$ schließlich $K_1(A) \cong \operatorname{coker} \iota \cong \mathbb{Z}^2$. $\square$

Man kann das Resultat vielleicht so interpretieren, daß ein $\mathbb{Z}$-Summand von $K_0(\mathcal{C}_F)$ von der Gestalt des Trägerraumes $\Omega \cong S^1$ stammt, während der restliche $\mathbb{Z}^3$-Summand von den jeweiligen Algebren auf Ω^i, $i = 1, 2, 3$, beigetragen wird. Die durch β definierte $\mathbb{Z}_3$-Operation auf Ω ist frei, somit ist (wie in der Einleitung angedeutet) $K_1(C(\Omega) \rtimes_\beta \mathbb{Z}_3) \cong K_1(C(\Omega/\mathbb{Z}_3)) = K_1(C(S^1))$, was einen $\mathbb{Z}$-Beitrag zu $K_1(\mathcal{C}_F \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3)$ liefert, während die Beiträge der drei Algebren auf Ω^i aufgrund der "Transitivität" von α zu einem $\mathbb{Z}$-Summanden zusammenfallen (um dies zu präzisieren, könnte man Erzeuger der jeweiligen Gruppen explizit aufschreiben.)

3.3 Eine Klasse universeller C^*-Algebren, die von Projektionen erzeugt werden

Wie wir gesehen haben, ist bei der Untersuchung eines bipartiten Komplexes Σ die zugehörige Projektionenalgebra $\mathcal{P}_\Sigma$ das eigentlich interessante und nichttriviale Objekt. In diesem Abschnitt betrachten wir eine deutlich eingeschränkte Klasse universeller Algebren, welche von Projektionen erzeugt werden, für die wir eine induktive Konstruktionsvorschrift gewinnen. Unter Annahme der Gültigkeit der Vermutung 2.2.0.19 lassen sich daraus allgemein die K-Gruppen der Algebren berechnen.

3.3.1 Zweiklassengraphen und ihre C^*-Algebren

Wir betrachten C^*-Algebren, welche von Projektionen mit vorgegebenen Relationen der Form $[p, q] = 0$ und $pq = 0$ erzeugt werden. Diese Relationen können wir in einen Graphen kodieren:

3.3.1.1 Definition.

- *Ein* Zweiklassengraph *ist ein Tripel* $G = (G_0, G_1, G_2)$, *bestehend aus*
  - *einer endlichen Menge* G_0 *von* Ecken,
  - *einer Menge* G_1 *von* Kanten $\{g, g'\}$ *mit* $g \neq g' \in G_0$,
  - *und einer Teilmenge* $G_2 \subset G_1$ ausgezeichneter Kanten.
- *Seien* $N_2 \subset N_1 \subset G_0$ *und* $g_0 \notin G_0$. *Die* Erweiterung *von* G *um eine Ecke* g_0 *bezüglich* (N_1, N_2) *ist der Zweiklassengraph* G' *mit*

$$G'_0 = G_0 \cup \{g_0\} \qquad \text{und} \qquad G'_i = G_i \cup \big\{\{g_0, g\} | g \in N_i\big\}, \quad i = 1, 2.$$

- *Sei* $N \subset G_0$ *eine Menge von Ecken. Der* von N erzeugte Untergraph $\langle N \rangle =: G'$ von G *ist definiert durch*

$$G'_0 = N, \qquad G'_i = \big\{\{n, n'\} \in G_i \mid n, n' \in N\big\}, \quad i = 1, 2.$$

- *Die* C^**-Algebra* $\mathcal{P}_G$ *ist die universelle unitale* C^**-Algebra mit Projektionen* p_g, $g \in G_0$, *und den Relationen*

$$[p_g, p'_g] = 0 \ \text{ falls } \ \{g, g'\} \in G_1, \qquad p_g p'_g = 0 \ \text{ falls } \ \{g, g'\} \in G_2.$$

Man kann auf kanonische Weise Morphismen zwischen Zweiklassengraphen definieren und die Zuordnung $G \mapsto \mathcal{P}_G$ zu einem kontravarianten Funktor fortsetzen. Insbesondere erhält man zu jedem Zweiklassengraphen G und jedem vollen Untergraphen $\langle N \rangle$ von G, der von den Ecken

$N \subset G_0$ aufgespannt wird, einen $*$-Homomorphismus $\mathcal{P}_G \to \mathcal{P}_{\langle N \rangle}$. Das nachfolgende Lemma besagt, daß man die Zuordnung $G \mapsto \mathcal{P}_G$ auch zu einem kovarianten Funktor fortsetzen kann, wenn man sich bei den Morphismen auf Einbettungen voller Untergraphen $\langle N \rangle \hookrightarrow G$ beschränkt:

3.3.1.2 Lemma. *Sei G ein Zweiklassengraph und $N \subset G_0$ eine Teilmenge von Ecken. Dann existiert ein $*$-Homomorphismus*

$$res_{G,\langle N \rangle} : \mathcal{P}_G \to \mathcal{P}_{\langle N \rangle}, \qquad p_g \mapsto \begin{cases} p_g, & g \in N, \\ 0, & g \in G_0 \setminus N, \end{cases}$$

und seine Einschränkung auf $\langle 1, p_n | n \in N \rangle \subset \mathcal{P}_G$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Die Existenz von $res_{G,\langle N \rangle}$ folgt direkt aus der universellen Eigenschaft von $\mathcal{P}_G$.
Die Einschränkung auf $\langle 1, p_n \,|\, n \in N \rangle \subset \mathcal{P}_G$ ist ein Isomorphismus: Aus der universellen Eigenschaft von $\mathcal{P}_{\langle N \rangle}$ gewinnt man mit der Vorschrift $p_n \mapsto p_n, n \in N$, sofort ein Inverses. □

3.3.2 Induktive Konstruktion der C^*-Algebra eines Zweiklassengraphen

Im folgenden geben wir eine induktive Konstruktion der C^*-Algebra eines Zweiklassengraphen und gewinnen daraus eine Formel für deren K-Gruppen.

3.3.2.1 Satz. *Sei G ein Zweiklassengraph und G' die Erweiterung von G um eine Ecke g_0 bezüglich der Ecken (N_1, N_2), $N_2 \subset N_1 \subset G_0$. Setze $N_s := N_1 \setminus N_2$ und $res := res_{\langle N_1 \rangle, \langle N_s \rangle} : \mathcal{P}_{\langle N_1 \rangle} \to \mathcal{P}_{\langle N_s \rangle}$. Wir fassen $\mathcal{P}_{\langle N_1 \rangle}$ gemäß Lemma 3.3.1.2 als Unteralgebra von $\mathcal{P}_G$ und vermöge der Einbettung*

$$j : \mathcal{P}_{\langle N_1 \rangle} \xrightarrow{id \oplus res} \mathcal{P}_{\langle N_1 \rangle} \oplus \mathcal{P}_{\langle N_s \rangle}, \qquad p_n \mapsto \begin{cases} (p_n, 0), & n \in N_2, \\ (p_n, p_n), & n \in N_s, \end{cases}$$

als Unteralgebra von $\mathcal{P}_{\langle N_1 \rangle} \oplus \mathcal{P}_{\langle N_s \rangle}$ auf. Dann gilt

$$\mathcal{P}_{G'} \;\cong\; (\mathcal{P}_G) \star_{\left(\mathcal{P}_{\langle N_1 \rangle}\right)} \left(\mathcal{P}_{\langle N_1 \rangle} \oplus \mathcal{P}_{\langle N_s \rangle}\right), \tag{3.38}$$

wobei p_{g_0} dem Element $1 \star (0,1)$ entspricht.

Beweis: Wir zeigen, daß die Algebra rechts in Gleichung (3.38) die universelle Eigenschaft besitzt, durch die $\mathcal{P}_{G'}$ definiert ist: Sei A eine unitale C^*-Algebra mit Projektionen $q_{g'}$, $g' \in G'_0$, welche den Relationen

$$[q_{g'}, q_{g''}] = 0 \text{ falls } \{g', g''\} \in G'_1, \qquad q_{g'} q_{g''} = 0 \text{ falls } \{g', g''\} \in G'_2$$

genügen. Wir müssen zeigen, daß genau ein unitaler $*$-Homomorphismus $(\mathcal{P}_G)\star_{\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}}\big(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}\oplus\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}\big)\to A$ mit $p_g\star 1\mapsto q_g$, $g\in G_0$, und $1\star(0,1)\mapsto q_{g_0}$ existiert.

Der universellen Eigenschaft von $\mathcal{P}_G$ zufolge definiert $p_g\mapsto q_g$, $g\in G_0$, einen (eindeutigen) unitalen $*$-Homomorphismus $\phi:\mathcal{P}_G\to A$.
In A kommutiert die Projektion q_{g_0} mit ganz $\phi(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle})=\langle q_n\mid n\in N_1\rangle$ sowie $\phi(\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle})\subset\phi(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle})$, und somit definiert die Vorschrift

$$(c,d)\mapsto(1-q_{g_0})\phi(c)+q_{g_0}\phi(d),\quad c\in\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle},\ d\in\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle},$$

einen unitalen $*$-Homomorphismus $\psi:\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}\oplus\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}\to A$. Für alle $n'\in N_2$ ist $(1-q_{g_0})q_{n'}=q_{n'}$, und folglich gilt für alle $n\in N_1$

$$\psi\circ j(p_n)=\left\{\begin{array}{lcll}\psi(p_n,0)&=&(1-q_{g_0})\phi(p_n)&n\in N_2,\\ \psi(p_n,p_n)&=&(1-q_{g_0})\phi(p_n)+q_{g_0}\phi(p_n),&n\in N_s,\end{array}\right\}=\phi(p_n).$$

Somit erhalten wir einen $*$-Homomorphismus $\phi\star\psi:(\mathcal{P}_G)\star_{\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}}\big(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}\oplus\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}\big)\to A$, der jedes $p_g, g\in G_0$, jeweils auf q_g, und $1\star(0,1)$ auf $\psi((0,1))=1q_{g_0}$ abbildet. Da die Elemente $p_g, g\in G_0$, und das Element $1\star(0,1)$ zusammen mit der 1 bereits die Algebra $(\mathcal{P}_G)\star_{\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}}\big(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}\oplus\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}\big)$ erzeugen, ist der $*$-Homomorphismus eindeutig durch die Bilder dieser Elemente bestimmt. □

3.3.3 K-Gruppen der C^*-Algebra eines Zweiklassengraphen

3.3.3.1 Definition. *Sei G ein Zweiklassengraph. Sei*

$$C_n(G)\ :=\ \big\{\{g_1,\dots,g_n\}\in G_0\times\cdots\times G_0|\{g_i,g_j\}\in G_1\backslash G_2\ \textit{für alle}\ i\neq j\big\}$$

*die Menge der $n-$*Cliquen *des durch $(G_0,G_1\setminus G_2)$ gegebenen Graphen (mit $C_0(G):=\{\emptyset\}$), und*

$$\deg_n(G)\ :=\ |C_n(G)|\quad\textit{sowie}\quad\deg(G)\ :=\ \sum_{n\geq0}\deg_n(G)$$

(beachte $\deg_0(G)=1$*).*

3.3.3.2 Satz. *Sei G ein Zweiklassengraph. Unter Annahme der Vermutung 2.2.0.19 ist $K_1(\mathcal{P}_G)=0$ und $K_0(\mathcal{P}_G)\cong\mathbb{Z}^{\deg(G)}$, frei erzeugt von den Elementen $[p_{g_1}\cdots p_{g_n}]$ mit $\{g_1,\dots,g_n\}\in C_n(G)$, $n\geq0$.*

Beweis: Wir beweisen die Behauptung induktiv über die Anzahl der Ecken unter Verwendung der Konstruktion des vorigen Satzes 3.3.2.1.

Die Behauptung gelte für den Zweiklassengraphen G. Sei G' die Erweiterung von G um eine Ecke g bezüglich der Ecken (N_1, N_2), $N_2 \subset N_1 \subset G_0$. Nach Satz 3.3.2.1 ist $\mathcal{P}_{G'} \cong (\mathcal{P}_G)\star_{\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}} \left(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle} \oplus \mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}\right)$ mit $N_s = N_1 \setminus N_2$, und nach Vermutung 2.2.0.20 haben wir eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}) \arrow[r] & K_0(\mathcal{P}_G) \oplus K_0(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}) \oplus K_0(\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}) \arrow[r] & K_0(\mathcal{P}_{G'}) \arrow[d] \\
K_1(\mathcal{P}_{G'}) \arrow[u] & K_1(\mathcal{P}_G) \oplus K_1(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}) \oplus K_1(\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}) \arrow[l] & K_1(\mathcal{P}_{\langle N_1\rangle}). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Die Abbildungen oben links und unten rechts sind offensichtlich injektiv, folglich sind die vertikalen Abbildungen 0 und $K_*(\mathcal{P}_{G'}) \cong K_*(\mathcal{P}_G) \oplus K_*(\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle})$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $K_1(\mathcal{P}_G) = K_1(\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle}) = 0$ und $K_0(\mathcal{P}_G) \oplus K_0(\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle})$ frei erzeugt von den Elementen $[(p_{g_1} \cdots p_{g_n}, 0)]$ mit $\{g_1, \ldots, g_n\} \in C_n(G)$ und $[(0, p_{g'_1} \cdots p_{g'_n})]$ mit $\{g'_1, \ldots, g'_n\} \in C_n(\langle N_s\rangle)$. Die Inklusionsabbildungen $\mathcal{P}_G \to \mathcal{P}_{G'}$, $a \mapsto a\star 1$, und $\mathcal{P}_{\langle N_s\rangle} \to \mathcal{P}_{G'}$, $b \mapsto 1\star(0, b)$, senden p_{g_i} auf p_{g_i} beziehungsweise $p_{g'_i}$ auf $(p_g p_{g'_i})$ und somit die obigen Erzeuger auf $[p_{g_1} \cdots p_{g_n}]$ beziehungsweise $[(p_g p_{g'_1}) \cdots (p_g p_{g'_n})] = [p_g p_{g'_1} \cdots p_{g'_n}]$. Die Behauptung folgt nun aus

$$C_n(G') = C_n(G) \cup \left\{\, \{g, g'_1, \ldots, g'_{n-1}\} \;\middle|\; \{g'_1, \ldots, g'_{n-1}\} \in C_{n-1}(\langle N_s\rangle) \,\right\},$$

und

$$\deg_n(G') = \deg_n(G) + \deg_{n-1}(\langle N_s\rangle).$$

□

3.3.3.3 Definition. *Sei G ein Zweiklassengraph. Der* saturierte Zweiklassengraph *G^c ist definiert durch*

$$G^c_0 = G_0, \quad G^c_1 = \{\{g, g'\} | g \neq g' \in G_0\}, \quad G^c_2 = G^c_1 \setminus (G_1 \setminus G_2) = (G^c_1 \setminus G_1) \cup G_2.$$

3.3.3.4 Korollar. *Sei G ein Zweiklassengraph.*

i) Die Algebra $\mathcal{P}_{G^c}$ ist kommutativ: $\mathcal{P}_{G^c} \cong \oplus_{n\in\mathbb{N},\sigma\in C_n(G)}\mathbb{C}$.

ii) Der durch $p_g \mapsto p_g$ definierte Homomorphismus $\mathcal{P}_G \to \mathcal{P}_{G^c}$ liefert einen Isomorphismus $K_0(\mathcal{P}_G) \cong K_0(\mathcal{P}_{G^c})$.

Beweis: i) Klar. ii) Nach Definition ist $G^c_0 = G_0$ und $G^c_1 \setminus G^c_2 = G_1 \setminus G_2$, folglich ist $C_n(G) = C_n(G^c)$. Die Behauptung folgt nun aus dem obigen Satz. □

4 Schluß

4.1 Offene Fragestellungen und Abschlußbemerkungen

Die folgenden Fragen und Beobachtungen könnten Ausgangspunkte für weitere Untersuchungen sein:

- *Struktur von Projektionsalgebren $\mathcal{P}_\Sigma$ bipartiter Komplexe Σ:* Diese Algebren treten nach Satz 3.2.1.3 bei der Betrachtung bipartiter eindimensionaler Komplexe in natürlicher Weise auf. Folgende Fragen liegen nahe:

  – Lassen sich die K-Gruppen dieser Algebren rein kombinatorisch aus Σ ableiten, wie dies etwa für die Algebren von Kommutatorgraphen der Fall ist (vgl. Satz 3.3.3.2)?

  – Können diese Algebren induktiv "explizit" konstruiert werden, parallel zu Satz 3.3.2.1?

  – Wie wirken sich Konstruktionen auf der Ebene der bipartiten Komplexe auf die assoziierten Algebren aus (Aussagen der Art von Satz 3.2.5.3)?

- *Struktur der Algebren eindimensionaler Komplexe:* Die Klasse bipartiter Komplexe kann als Spezialfall der folgenden Situation betrachtet werden:

  Sei $\pi : \Sigma \to B$ eine Surjektion bipartiter Komplexe derart, daß keine Kante in Σ auf eine Ecke in B abgebildet wird, d.h. für $\{s, s'\} \in \Sigma$ mit $s \neq s'$ gelte stets $\pi(s) \neq \pi(s')$. Ferner sei C_B^f kommutativ, und für jede Einbettung $f : \mathfrak{C}^4 \hookrightarrow \Sigma$ sei die Menge der Bildpunkte $\{\pi \circ f(s_1), \dots, \pi \circ f(s_4)\}$ zwei-elementig (den Voraussetzungen nach kann sie nicht 1- oder 4-elementig sein). Dann folgt aus Lemma 3.2.5.1, daß die Elemente

  $$g_b := \sum_{s \in \pi^{-1}(b)} h_s \ \in \ C_\Sigma^f$$

für alle $b \in V_B$ zentral sind, und analog zu Satz 3.2.1.3 zeigt man, daß C^f_Σ isomorph zu der C^*-Algebra

$$\begin{aligned}\{f : |B| \to \mathcal{P} \mid\ & f(x) \in \langle p_s \mid s \in \pi^{-1}(b)\rangle \text{ für } x = |b|, b \in B,\\ & f(x) \in \langle p_s \mid s \in \pi^{-1}(\{b, b'\})\rangle \text{ für } x \in |b, b'| \text{ mit } \{b, b'\} \in B\},\end{aligned}$$

ist, wobei $|B|$ die geometrische Realisierung des Komplexes B, $|b|$ die Realisierung der Ecke b und $|b, b'|$ die der Kante $\{b, b'\} \in B$ bezeichnet, und schließlich $\mathcal{P}$ die universelle unitale C^*-Algebra mit Projektionen $p_s, s \in V_\Sigma$, und den Relationen

$$\begin{aligned}\sum_{s\in\pi^{-1}(b)} p_s &= 1, \quad b \in V_b,\\ p_s p_{s'} &= 0 \quad \text{falls nicht } \{s, s'\} \in \Sigma\end{aligned}$$

ist.

- *Algebren von Zweiklassengraphen:* Sei G ein Zweiklassengraph, auf dem eine zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n$ operiert. Läßt sich die induktive Konstruktion der Algebren $\mathcal{P}_G$ aus Satz 3.3.2.1 (unter etwaigen Zusatzvoraussetzungen an die Gruppenwirkung) auf das verschränkte Produkt $\mathcal{P}_G \rtimes \mathbb{Z}_n$ ausdehnen?

4.2 Danksagung

Zum Abschluß möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Joachim Cuntz für die angenehme Betreuung der Diplomarbeit bedanken. Neben den hilfreichen Anregungen, Kommentaren und Hinweisen gilt dieser Dank auch insgesamt der sehr freundlichen Aufnahme in Münster.

Andreas Thom hat mich auf den Artikel [5] hingewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] Bruce Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras.* Springer, 1986.

[2] Joachim Cuntz. A survey of some aspects of noncommutative geometry. *Jahresber d. Dt. Math.-Verein.*, 95:60–84, 1993.

[3] Joachim Cuntz. Non-commutative simplicial complexes and the Baum-Connes-conjecture. Technical Report 157, SFB 478 – Geometrische Strukturen in der Mathematik des Mathematischen Instituts der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, März 2001.

[4] Gerard J. Murphy. *C^*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[5] Gabriel Nagy. On the K-theory of the noncommutative circle. *J. Operator Theory*, 31:303–309, 1994.

[6] W. Paschke. $\mathbb{Z}_2$-equivariant K-theory. In *OATE*, number 1132 in Springer LNM, pages 362–373, 1985.

[7] Gert K. Pedersen. *C^*-Algebras and Their Automorphism Groups.* Academic Press, 1979.

[8] H. Takai. On a duality for crossed products of C^*-algebras. *J. Functional analysis*, 19:25–39, 1975.

[9] Klaus Thomsen. On the KK-theory and E-theory of amalgamated free products of C^*-algebras. Technical report, Department of Mathematical Sciences of the University of Aarhus, März 2001.