1. Übung "Von Neumann-Algebren"

Sei H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $\mathcal{B}_1(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ die norm-abgeschlossene Einheitskugel.

1. Zeige direkt (ohne Verwendung von Satz 4 ii)): $\mathcal{B}_1(H)$ ist abgeschlossen bzgl. aller Topologien aus Def. 1.1.

2. Zeige: Jede stark konvergente Folge ist norm-beschränkt und σ-stark konvergent. (Hinweis: Satz von Banach-Steinhaus) Folgt daraus sofort, dass die starke und die σ-starke Topologie gleich sind?

3. Sei $(p_\nu)_\nu$ ein monoton wachsendes Netz von Projektionen in $\mathcal{B}(H)$ und $p = \sup_\nu p_\nu$ (d.h. $pH = \overline{\bigcup_\nu p_\nu H}$). Zeige: $(p_\nu)_\nu$ konvergiert σ-stark gegen p.

Keine der Topologien aus Definition 1.1 ist metrisierbar:

Z4. [Takesaki I, Kapitel II.3 Aufgabe 1] Sei $(p_n)_n$ eine Folge paarweise orthogonaler Projektionen in $\mathcal{B}(H)$.

   (a) Seien $\xi_i, \eta_i \in H$ $(i \in \mathbb{N})$ mit $\sum_i \|\xi_i\|^2, \sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$. Ferner sei $x_n = \sum_i \rho_{\eta_i,\xi_i}(p_n) = \sum_i |\langle \eta_i | p_n \xi_i \rangle|$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeige: $(x_n)_n \in l^1(\mathbb{N})$.

   (b) Folgere aus (a): 0 ist Häufungspunkt der Menge $\{np_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzgl. der σ-starken Topologie.

   (c) Zeige: Keine Teilfolge von $(np_n)_n$ konvergiert schwach gegen 0. (Hinweis: Verwende Aufgabe 1)

   (d) Folgere aus (b),(c): Keine der Topologien aus Definition 1.1 ist metrisierbar.

Die Multiplikation $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ ist bezüglich keiner Wahl von Topologien aus Definition 1.1 stetig:

Z5. [Dixmier, Kapitel I.3 Aufgabe 2] Sei $W \subseteq \mathcal{B}(H)$ eine σ-starke Umgebung der 0. Zeige nacheinander:

   (a) Es existiert $\zeta \in H$ mit $\sup_{T \in W} \|T\zeta\| = \infty$. (Hinweis: Satz von Banach-Steinhaus)

   (b) Für jedes $\xi \in H$ existieren $S \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $S\xi = \lambda\zeta$, $\lambda \neq 0$.

   (c) Für jedes $\xi \in H$ ist $\sup_{S,T \in W} \|TS\xi\| = \infty$.

   (d) Für alle $\eta, \xi \in H$ ist $\sup_{S,T \in W} |\langle \eta | TS\xi \rangle| = \infty$.

   (e) Die Multiplikation $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ ist nicht stetig bezüglich der σ-stark$\times\sigma$-starken Topologie auf $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H)$ und der schwachen Topologie auf $\mathcal{B}(H)$.