timmermt@math.uni-muenster.de

Abgabe bis 21.06, 10 Uhr
Besprechung vom 25. bis 29.06

Übungen zur Funktionentheorie

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $z \mapsto f(z)$ jeweils die Laurent-Reihe um die Singularität z_0 und den Typ der Singularität:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ bei $z_0 = -2$; (*Hinweis:* Benutzen Sie die geometrische Reihe.)

(b) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ bei $z_0 = -2$;

(c) $f(z) = (z-3)\sin\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$ bei $z_0 = -2$;

(d) $f(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z(1-z)}$ bei $z = 0$.

Aufgabe 2. Für $w \in \mathbb{C}$ sei $f_w \colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto \exp\left(\frac{w}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$. Zeigen Sie:

(a) $f_{-w}(z) = f_w(z^{-1}) = f_w(-z)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$.

(b) Für jedes $w \in \mathbb{C}$ besitzt die Funktion f_w eine Laurent-Entwicklung $f_w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n$ mit gewissen Koeffizienten $J_n(w) \in \mathbb{C}$.

(c) $J_n(-w) = J_{-n}(w) = (-1)^n J_n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$.

(d) $J_n(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(w\sin(t) - nt)}\, dt$ für alle $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$.

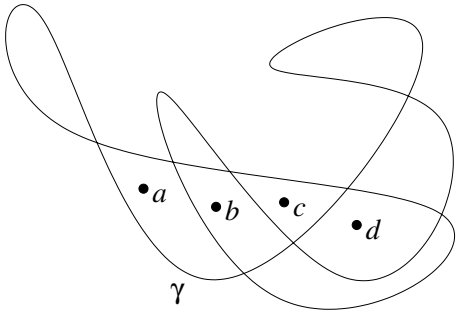
(*Bemerkung:* Die Funktionen $w \mapsto J_n(w)$ heißen *Besselfunktionen.*)

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(a) Hat eine holomorphe Funktion f an der Stelle z einen Pol der Ordnung m und ist p ein Polynom von Grad n, so hat $p \circ f$ an der Stelle z einen Pol der Ordnung $n \cdot m$.

(b) Hat eine holomorphe Funktion f an der Stelle z eine wesentliche Singularität, so hat $\exp \circ f$ an der Stelle z eine wesentliche Singularität.
(*Hinweis:* Benutzen Sie u.a. den Satz von Casorati-Weierstrass.)

Aufgabe 4. Wählen Sie für den folgenden Weg γ eine Durchlaufrichtung und bestimmen Sie die entsprechende Umlaufzahl für die Punkte a, b, c, d, indem Sie γ durch eine Homotopie geeignet vereinfachen:


a
b
c
d
γ