Übung zur Mathematik für Physiker III
Blatt 10

Abgabe bis Montag, 12. Januar, 10 Uhr

Aufgabe zur Bearbeitung in der Übung

Aufgabe 1. (a) Sei $R(a,b)$ eine rationale Funktion in a und b, also ein Quotient von Polynomen in den Variablen a und b. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_\nu),$$

wobei die Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ und die komplexe Funktion f gegeben seien

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{it}, \qquad f(z) = -\frac{i}{z} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)$$

und $z_1, \ldots, z_n$ die Polstellen von f in der Einheitskreisscheibe bezeichnen.

(b) Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{i\lambda + \sin t} = -\frac{2\pi i}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ für $\lambda > 0$.

Aufgaben zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 2. In mehreren Schritten soll gezeigt werden:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} = \pi\sqrt{8}.$$

(a) Schreiben Sie dazu den Integranden in der Form $R(\cos\theta, \sin\theta)$ mit einer rationalen Funktion R zweier Variablen, und zeigen Sie für die Funktion f, die wie in Aufgabe 1(a) definiert sei, die Gleichung $f(z) = -i\dfrac{8z^3}{z^8+6z^4+1}$.

(b) Bestimmen Sie die Pole von f, die im Einheitskreis liegen, und zeigen Sie, dass an jedem dieser Pole das Residuum gleich $-i/\sqrt{8}$ ist.

(c) Schlussfolgern Sie die eingangs behauptete Gleichung für das Integral.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktionen

$$g(x) := \frac{1}{2}(x + \mathrm{e}^{-x}), \qquad h(x) := \frac{1}{6}(5x + \mathrm{e}^{-x}).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h das Intervall $[0,1]$ in sich selbst abbilden.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x_1, x_2 \in [0,1]$ eine Zahl $\xi \in [0,1]$ mit $\mathrm{e}^{-x_1} - \mathrm{e}^{-x_2} = (x_2 - x_1)\mathrm{e}^{-\xi}$ existiert. (*Hinweis:* Zwischenwertsatz der Differenzialrechnung.)

(c) Bestimmen Sie (möglichst kleine) Konstanten $\alpha, \beta < 1$ mit $|g(x_1) - g(x_2)| < \alpha|x_1 - x_2|$ und $|h(x_1) - h(x_2)| < \beta|x_1 - x_2|$ für alle $x_1, x_2 \in [0,1]$. (*Hinweis:* Verwenden Sie (b).)

(d) Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h auf dem Intervall $[0,1]$ jeweils genau einen Fixpunkt besitzen, und dass beide Fixpunkte übereinstimmen.

Aufgabe 4. Wir betrachten ein lineares homogenes AWP der Form

$$y'(x) = A(x)y(x) \text{ mit } A(x) \in M_n(\mathbb{C}), \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

die Picard-Lindelöf-Iteration, also die Folge der Funktionen $(y_{(k)})_k$ mit

$$y_{(0)}(x) = y_0, \quad y_{(k+1)}(x) = (\Phi y_{(k)})(x) = y_0 + \int_0^x A(x)y_{(k)}(x)\,\mathrm{d}x \text{ für } k \geq 0.$$

Zeigen Sie:

(a) $y_{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{k} B_l(x)y_0$, wobei $B_0(x) = E_n$ und

$$\begin{aligned} B_{l+1}(x) &= \int_0^x A(x_1)B_l(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_l} A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_{l+1})\,\mathrm{d}x_{l+1}\cdots\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1. \end{aligned}$$

(b) Im Fall $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $B_l(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^l}{l!} & \frac{x^l}{l!} - \frac{x^{l+1}}{(l+1)!} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie für den Fall aus (b) die Funktion $y_{(\infty)}(x) := \lim_k y_{(k)}(x)$ und prüfen Sie nach, dass $y_{(\infty)}$ das AWP löst.