W. Werner und T. Timmermann SS 13

Übung zur Mathematik für Physiker II
Blatt 1

Aufgaben zur Bearbeitung in der Übung

Aufgabe 1. (a) Bezeichne S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich. Zeigen Sie, dass S_n bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet.

(b) Wir betrachten ein n-Eck, dessen Ecken im Uhrzeigersinn mit $1, \dots, n$ nummeriert sind. Wie kann man jeder Symmetrie des n-Ecks ein Element von S_n zuordnen? Entspricht umgekehrt jedes Element von S_n einer Symmetrie des n-Ecks? Wieviele Symmetrien gibt es?

(c) Ist die Gruppe S_n kommutativ? (*Hinweis*: Nutzen Sie (b).)

Aufgabe 2. (a) $\mathbb{R}$ ist in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Inwieweit kann man $\mathbb{C}$ auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen?

(b) Ist $i\mathbb{R} = \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}$, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum oder $\mathbb{C}$-Vektorraum auffasst?

(c) Welche Geraden, Ebenen,... im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ sind Untervektorräume?

(d*) *Die folgende Frage ist sehr knifflig und nur für Tüftelfreunde*: Kann man $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise als $\mathbb{C}$-Vektorraum auffassen, so dass $x \boxplus y = x + y$ und $\lambda \boxdot x = \lambda x$ für alle $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ gilt? (*Hinweis:* Spielen Sie mit $i \boxdot 1$ herum.)

Aufgaben zur Abgabe bis Freitag, 19. April, 12 Uhr

Aufgabe 3. Prüfen und begründen Sie, ob die folgenden Mengen mit der angegebenen Verknüpfung jeweils eine Gruppe bilden:

(a) die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation;

(b) die Menge $\{\exp(2k\pi i/n) : k = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{C}$ mit der Multiplikation;

(c) die Menge $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit der Verknüpfung $\bullet$, definiert durch $a \bullet b := a + b - ab$ (*Hinweis:* Können Sie das Beispiel auf (a) zurückführen?);

(d) die Menge $\{f \in \mathfrak{C}([0,1]) : f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$ mit der Verknüpfung $\boxtimes$, definiert durch $(f \boxtimes g)(x) := f(x)g(x)$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{C}([0,1])$ als Vektorraum wie in der Vorlesung. Prüfen und begründen Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathfrak{C}([0,1])$ einen Untervektorraum bilden:

(a) $\{f \in \mathfrak{C}([0,1]) : f(0) = f(1)\}$,

(b) $\{f \in \mathfrak{C}([0,1]) : f(0) \cdot f(1) > 0\}$,

(c) $\{f \in \mathfrak{C}([0,1]) : f \text{ ist differenzierbar}\}$,

(d) $\{f \in \mathfrak{C}([0,1]) : f \text{ ist nicht differenzierbar}\} \cup \{0\}$,
wobei 0 die Funktion bezeichne, die konstant den Wert 0 annimmt.