Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 1
Blatt 11

Abgabe bis Do, 15.01., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-4 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Ungleichung $\exp(x) > x^{n+1}/(n+1)!$, dass $\lim_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $\lim_{t\to 0} t(\ln t)^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Die allgemeine Potenzfunktion wird definiert durch

$$x^s := \exp(s \ln(x)) \quad \text{für alle } s, x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Exponential- und Logarithmus-Funktion, dass die Potenzfunktion $g_s(x) := x^s = \exp(s \ln(x))$ den gewohnten Rechenregeln genügt, also für alle $s, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (0,\infty)$ gilt:

(a) $g_s'(x) = s g_{s-1}(x)$,

(b) $g_{s+t}(x) = g_s(x) g_t(x)$, insbesondere $g_{s+1}(x) = x g_s(x)$,

(c) $g_s(g_t(x)) = g_{st}(x)$,

(d) $g_n(x) = x^n$ und $g_{1/n}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Aufgabe 3. Für $s \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1,1)$ sei $g_s(1+x) = (1+x)^s$ und $f_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$ wie in Aufgabe 3 des vorigen Blattes. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$x \mapsto f_s(x)/g_s(1+x)$$

konstant ist und folgern Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n = (1+x)^s$ für alle $x \in (-1,1)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x), & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom P_n existiert mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)\exp(-1/x), & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Beachten Sie dabei besonders den Punkt $x = 0$.

Zusatzaufgabe 5. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R_0. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k$ die abgeleitete Reihe, deren Konvergenzradius mit R_1 bezeichnet werde. Man beweise $R_0 = R_1$. Hinweise:

(a) $R_1 \leq R_0$ folgt daraus, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergiert, falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k$ absolut konvergiert.

(b) Der schwierigere Teil ist $R_0 \leq R_1$. Es ist nicht richtig, dass absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k$ nach sich zieht (Gegenbeispiel?).

(c) Ein zielführender Ansatz für $R_0 \leq R_1$: ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent und $|y| < |x|$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)y^k$ absolut konvergent.

Man folgere: ist $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe, dann ist die Grenzfunktion $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar.