“Logische Grundlagen der Mathematik”, WS 2014/15

Thomas Timmermann

8. Januar 2015

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Letzte Woche hatten wir die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen definiert. Wir wollen nun zeigen, dass die reellen Zahlen vollständig sind, d.h. jede Cauchy-Folge reeller Zahlen gegen einen Grenzwert konvergiert. Dazu benötigen wir zunächst die Betragsfunktion und implizit damit die Ordnung auf $\mathbb{R}$.
Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$. Wir definieren

$$[(x_n)_n] \leq [(y_n)_n] \quad :\Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \leq y_n + 1/K.$$

Satz. *(i) Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist wohldefiniert und eine Ordnungsrelation.*

(ii) Bezüglich dieser Ordnung wird $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper*, d.h.*

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(b) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (0 \leq a \wedge 0 \leq b) \Rightarrow 0 \leq ab.$

Der Beweis von (i) und (iia) ist recht einfach und eine sinnvolle Übungsaufgabe; für (iib) benötigt man wieder, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist.
Wie in jedem geordneten Körper können wir nun die Betragsfunktion definieren als

$$|\cdot| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto |a| := \begin{cases} -a, & a \leq 0, \\ a, & a \geq 0. \end{cases}$$

Lemma. *Für jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ ist auch $(|x_n|)_n$ eine Cauchy-Folge und $|[(x_n)_n]| = [(|x_n|)_n]$.*

Auch dieser Beweis ist, wenn man sich einmal reingedacht hat, nicht sehr schwierig.

Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist wieder eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die wir als $a = (a_m)_m$ schreiben mit $a_m \in \mathbb{R}$. Jedes a_m ist die Äquivalenzklasse einer Cauchy-Folge $(x_{mn})_n$ in $\mathbb{Q}$, sodass wir a durch eine unendliche Matrix rationaler Zahlen darstellen können, in der jede Zeile eine Cauchy-Folge ist:

$$\begin{aligned} a_1 &= [(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots)], \\ a_2 &= [(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots)], \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ a_m &= [(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}, \ldots)], \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \end{aligned}$$

Definition. *Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$*

- konvergiert *gegen ein $b \in \mathbb{R}$, falls $\forall K \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |b - a_n| \leq 1/K$; wir schreiben dann $\lim_n a_n = b$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} b$;*
- *ist eine* Cauchy-Folge, *falls $\forall K \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq 1/K$.*

Zur Erinnerung: Wir hatten $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ angesehen, indem wir jede rationale Zahl x mit der Klasse $[(x)_n]$ der konstante Folge identifiziert haben.
Nun kommt ein ganz wichtiger Satz:

Satz. *Jede Cauchy-Folge rationaler Zahlen konvergiert gegen die reelle Zahl, die sie darstellt, m.a.W. die Äquivalenzklasse einer Cauchy-Folge ist ihr Grenzwert.*

Beweis. Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ und $b := [(x_n)_n] \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen: für jedes $K \in \mathbb{N}$ existiert ein m_0 mit $|b - x_m| < 1/K$. Hier ist

$$|b - x_m| = |[(x_n)_n] - x_m| = |[(x_n - x_m)_n]| = [(|x_n - x_m|)_n].$$

Weil $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < 1/(2K)$ für alle $n, m \geq n_0$, und damit folgt für alle $m \geq n_0$

$$[(|x_n - x_m|)_n]| < 1/K, \quad \text{also} \quad |b - x_m| < 1/K. \qquad \square$$

Ebenfalls ganz wichtig ist:

Folgerung. $\mathbb{Q}$ *ist* dicht in $\mathbb{R}$ *in dem Sinn, dass es für jedes* $a \in \mathbb{R}$ *und jedes* $K \in \mathbb{N}$ *ein* $x \in \mathbb{Q}$ *gibt mit* $|a - x| < 1/K$.

Beweis. Ist $a = [(x_n)_n]$, so folgt $|a - x_n| < 1/K$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Damit können wir die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ohne Mühe beweisen:

Theorem. *Jede Cauchy-Folge in* $\mathbb{R}$ *konvergiert, d.h.* $\mathbb{R}$ *ist vollständig.*

Beweis. Sei $(a_m)_m$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Mit Hilfe der Folgerung wählen wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $x_m \in \mathbb{Q}$ mit $|a_m - x_m| < 1/m$. Wir zeigen:

(i) $(x_m)_m$ ist eine Cauchy-Folge (in $\mathbb{Q}$) und

(ii) $(a_m)_m$ konvergiert mit $\lim_m a_m = \lim_m x_m = [(x_m)_m]$.

Zu (i): Sei $K \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein m_0 mit $|a_m - a_{m'}| < 1/(3K)$ für alle $m, m' \geq m_0$, und für alle $m, m' \geq \max\{m_0, 3K\}$ folgt

$$|x_m - x_{m'}| \leq \underbrace{|x_m - a_m|}_{<1/(3K)} + \underbrace{|a_m - a_{m'}|}_{<1/(3K)} + \underbrace{|a_{m'} - x_{m'}|}_{<1/(3K)} < 1/K.$$

Zu (ii): Setze $b := [(x_n)_n] = \lim_n x_n$. Sei $K \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein n_0 mit $|x_n - b| < 1/(2K)$ für alle $n \geq n_0$, und für alle $n \geq \max\{n_0, 1/(2K)\}$ folgt

$$|b - a_n| \leq \underbrace{|b - x_n|}_{<1/(2K)} + \underbrace{|a_n - x_n|}_{<1/(2K)} < 1/K. \qquad \square$$

5 Kardinalzahlen

Der Ursprung der Zahlen ist sicher das Zählen der Elemente endlicher Mengen. Aber wie kann man die Größe unendlicher Mengen vergleichen? Cantor untersuchte als Erster diese Frage ganz systematisch (und wurde dafür vielfach angefeindet.)

Hilberts Hotel

Stellen Sie sich vor, dass nur noch wenige Tage bis Weihnachten sind. Sie fahren mit dem Zug nach Hause. Alle Geschenke gerade noch gekauft, freuen Sie sich auf eine gemütliche Zugfahrt durch die dunkle Winterlandschaft. Doch auf einmal hält

der Zug an. “Streik!” hallt es aus den Lautsprechern, und schon werden Sie aus dem Zug gedrängt und im Niemandsland stehen gelassen. Handy-Empfang: Null.
Sie blicken sich um. Nichts zu sehen bis auf einen kleinen Lichtschimmer zwischen den Bäumen. Beim Näherkommen entpuppt sich das flackernde Licht als Leuchtreklame: “Hilberts Hotel”, etwas kleiner darunter: “Unendlich viele Zimmer.” Wenigstens also nicht in der Kälte draußen übernachten.
Sie treten ein und sehen rechterhand einen unendlich langen Flur — Zimmer 1, 2, 3 und so weiter, tatsächlich unendlich viele. Links die Rezeption. Der Portier schreckt hoch und zuckt bedauernd die Schultern: “Alles voll.” — “Wie, alles voll?”, fragen Sie, “Das kann doch gar nicht sein! Draußen steht: ‘unendlich viele Zimmer’!”. Der Portier zuckt schon wieder mit den Schultern: “Aber leider auch unendlich viele Gäste.”
Sie sacken in sich zusammen, aber da hat der Portier auch schon die rettende Idee. “ Alle Gäste bitte einmal aus ihrem Zimmer heraustreten und ein Zimmer weiter nach rechts gehen, bitte.” Und schon ist Zimmer Nummer 1 für sie frei.
Wenig später hören Sie Geräusche. Vor dem Hotel hält ein Bus mit Gästen. “Kein Problem”, denkt der Portier, n neue Gäste, alle alten Gäste n Zimmer weitergehen, fertig. Aber nein. Das ist ein Bus mit unendlich vielen Gästen. Was tun? Der Portier weiß sich wieder Rat: “Alle Gäste bitte einmal aus ihrem Zimmer heraustreten und von der Nummer n zur Nummer $2n$ gehen, bitte.” Nun sind die Zimmer mit den Nummern 1, 3, 5, ... frei und alle finden wieder einen Platz.
Mitten in der Nacht dann unendlicher Lärm. Vor dem Hotel: unendlich viele Busse, jeder voll mit unendlich vielen neuen Gästen! Der Portier schluckt und weiß er keinen Rat mehr. Sie müssen ihm helfen!

Mächtigkeit von Mengen

Frage: Wann sollen wir zwei Mengen A und B als “gleich groß” ansehen?
Klar: Wenn A und B gleich viele Elemente haben. Aber wieviel Elemente hat $\mathbb{N}_0$? oder $\mathbb{R}$? Wie soll man die zählen?
Idee: Wir müssen die Elemente nicht zählen, sondern nur die Anzahl vergleichen; dazu können wir die Elemente von A und B “paarweise antreten lassen” und schauen, ob welche aus A oder aus B übrigbleiben.
Um das genauer zu fassen, benötigen wir den Begriff einer Bijektion. Eine Abbildung f einer Menge A in eine Menge B heißt *bijektiv* oder *Bijektion*, wenn

- es eine Umkehrabbildung f^{-1} von B nach A mit $f^{-1}(f(a)) = a$ und $f(f^{-1}(b)) = b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gibt,

oder, was gleichbedeutend ist, wenn

- f injektiv und surjektiv ist, also keine zwei Elemente auf dasselbe abbildet und jedes Element von B das Bild eines Elementes aus A ist.

Definition. *Zwei Mengen A, B heißen* gleichmächtig, *falls eine Bijektion $A \to B$ existiert. In dem Fall schreiben wir $|A| = |B|$. Eine Menge A heißt* abzählbar, *falls $|A| = |\mathbb{N}_0|$.*

Beispiel. *Es gilt*

(i) $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$, *denn die Abbildung $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$, ist eine Bijektion;*

(ii) $\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}\|$, *d.h. $\mathbb{Z}$ ist abzähbar,*

Satz. *Für jede Menge A gilt $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, d.h. es gibt keine Bijektion von A nach $\mathcal{P}(A)$.*

Beweis. Angenommen, $f : A \to \mathcal{P}(A)$ wäre eine Bijektion. Dann wäre die Menge

$$B := \{a \in A : a \notin f(a)\}$$

eine Teilmenge von A und folglich $B = f(b)$ für ein $b \in A$. Falls $b \in B = f(b)$, erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von B; falls $b \notin B = f(b)$, ebenfalls. $\square$