REPETITORIUM IM WINTERSEMESTER 2014/15

THOMAS TIMMERMANN

Lineare Algebra I

1. Termin am 15.10.

- Mengen, Abb. Relationen
- Gruppen und Körper
- Vektorräume und Unterräume

1.1. **Mengen, Abbildungen, Relationen.**

Frage 1.1.1. *Was ist formal eine Abbildung?*
Eine Abbildung zw. Mengen X, Y ist eine Teilmenge $f \subseteq X \times Y$ mit der Eigenschaft $\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in f$; wir schreiben dann $f : X \to Y$ und $f(x) = y$, falls $(x, y) \in f$.

Frage 1.1.2. *Wann ist eine Abbildung injektiv/surjektiv/bijektiv?*

Frage 1.1.3. *Wann heißen zwei Mengen X, Y gleichmächtig?*
Wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt; schreiben dann $|X| = |Y|$.
Satz von Cantor-Bernstein: $|X| = |Y|$, falls injektive Abb. $X \to Y$ und $Y \to X$ existieren.

Frage 1.1.4. *Wann heißt eine Menge X abzählbar/überabzählbar?*
Falls $|X| = |\mathbb{N}|$ / X unendlich und $|X| \neq \mathbb{N}$.

Frage 1.1.5. *Beispiele?*
$|\mathbb{Q}|$ abzählbar, $|\mathbb{R}|$ überabzählbar (Cantorsches Diagonalverfahren).

Frage 1.1.6. *Was ist eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X? Was sind Äquivalenzklassen?*
Eine Relation auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$ und heißt Äq.-Rel., falls sie folgende Eigenschaften hat:

- *reflexiv* $:\Leftrightarrow \forall x \in X : (x, x) \in R$
- *symmetrisch* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X : (x, y) \in R \to (y, x) \in R$
- *transitiv* $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \to (x, z) \in R$

Man schreibt dann meist $x \sim y$ statt $(x, y) \in R$.
Die Äquivalenzklasse eines $x \in X$ ist dann $[x] := \{y \in X : x \sim y\}$; Menge der Äquivalenzklassen ist $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$.

Frage 1.1.7. *Beispiele?*

Date: October 16, 2014.

(a) auf $\mathbb{Z}$: $x \sim y :\Leftrightarrow n|(x-y)$ für ein festes $n \in \mathbb{Z}$;
Äquivalenzklassen sind Restklassen $[x] = x \mod n$; ihre Menge $\mathbb{Z}/\sim$ wird mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet.
(b) zu einer Abbildung $f: X \to Y$: $x \sim x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x')$;
Äquivalenzklassen sind Urbilder: $[x] = f^{-1}(f(x))$

Frage 1.1.8. *Was ist eine Halbordnung (auch partielle Ordnung)/Ordnung (auch totale Ordnung) auf einer Menge X?*
Eine Halbordnung ist eine Relation $R \subseteq X \times X$, die reflexiv, transitiv und

- anti-symmetrisch $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X : ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \to (x = y)$.

ist; für eine totale Ordnung muss dazu gelten:

- $\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x$.

Man schreibt meist $x \leq y$ für $(x,y) \in R$;

Frage 1.1.9. *Beispiele?*

(a) $\mathbb{N}$ mit gew. Ordnung
(b) $\mathbb{N}$ mit $x \leq y :\Leftrightarrow x|y$
(c) Potenzmenge $\mathcal{P}(Y)$ mit $A \leq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$

Frage 1.1.10. *Was sagt das Lemma von Zorn? Wozu wird es benötigt?*
Sei X geordnet (d.h. mit Ordnungsrelation versehen) so, dass jede Kette $K \subseteq X$ (total geordnete TM) eine obere Schranke besitzt (ein d$z \in X$ mit $\forall x \in K : x \leq z$). Dann enthält X ein maximales Element (ein $x \in X$ mit $\neg\exists y \in x : x \leq y$).
Das Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom. Man benutzt es für transfinite Induktion, z.B. für "Jeder VR hat eine Basis".

1.2. **Gruppen und Körper.**

Frage 1.2.1. *Was ist eine Gruppe?*
Eine Menge G mit einer Abbildung $*: G \times G \to G$ s.d.:

- $\forall g, g', g'' \in G : (g * g') * g'' = g * (g' * g'')$ (Assoziativität)
- $\exists e \in G \forall g \in G : e * g = g = g * e$ (neutrales Element)
- $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : gg^{-1} = e = g^{-1}g$ (inverses Element)

$(G, *)$ heißt *abelsch*, falls $\forall g, g' \in G : g * g' = g' * g$.

Frage 1.2.2. *Beispiele?*
Abelsch:

(a) $(\mathbb{Z}, +)$, aber nicht $(\mathbb{N}, +)$
(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
(c) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Restklassen modulo n mit Addition

Nicht abelsch:

(d) Symmetrische Gruppe S_n: alle Bijektionen von $\{1, \ldots, n\}$ mit Komposition
(e) $GL_n(K)$: invertierbare $n \times n$-Matrizen über einem Körper K, mit Matrixmultiplikation

Frage 1.2.3. *Was ist ein Körper?*
Eine Menge K mit Abbildungen $+, \cdot \colon K \times K \to K$ s.d.:

- $(K, +)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element 0,
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element 1),
- (Distributivgesetz) $\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Frage 1.2.4. *Beispiele?*

(a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$
(b) $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$
(c) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für jede Primzahl p, mit Addition/Multiplikation;
Existenz von mult. Inversen:

$$p \not| a \Rightarrow \mathrm{ggT}(a, b) = 1 \Rightarrow \exists b, q \in \mathbb{N} : ab - pq = 1$$
$$\Rightarrow (a \mod p)(b \mod p) = (1 \mod p)$$

Frage 1.2.5. *Veranschaulichung der Addition/Multiplikation in $\mathbb{C}$?*

- Addition von $a, b \in \mathbb{C}$ als Vektoren im $\mathbb{R}^2$
- Multiplikation in Polarkoordinaten-Darstellung: $re^{i\phi} \cdot r'e^{i\phi'} = rr'e^{i(\phi+\phi')}$

Frage 1.2.6. *Was ist die Charakteristik eines Körpers?*
Das kleinste $p \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ mit $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ (ist stets eine Primzahl).

1.3. **Der Begriff des Vektorraums/Untervektorraums.**

Frage 1.3.1. *Was ist ein Vektorraum (VR)?*
Ein VR *über einem Körper K* ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ mit ... **(HA)**

Frage 1.3.2. *Was ist ein Untervektorraum (UR)?*
Eine Teilmenge $W \subseteq V$ mit $W \neq \emptyset$ und

$$\forall w, w' \in W, \lambda \in K : w + w' \in W, \lambda w \in W.$$

Lemma: Damit ist W selbst ein VR. **(HA)**

Frage 1.3.3. *Was ist ein affiner UR?*
Eine Teilmenge $W \subseteq V$ mit $W \neq \emptyset$, die folgende äq. Bed. erfüllt:

- $\forall \lambda \in K, w, w' \in W : \lambda w + (1 - \lambda)w' \in W$,
- für alle/ein $w \in W$ ist $W - w$ ein UR

Äquivalenz der Bed: **(HA)**

Frage 1.3.4. *Beispiele?*

(a) Für $I \neq \emptyset$ ist $K^I := \{f : I \to K\}$ ein K-VR mit

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i), \qquad (\lambda \cdot f)(i) = \lambda f(i).$$

Wichtiger UR: $K^{(I)} = \{f : I \to K : f(i) = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$.

Spezialfälle/Unterräume:

(b) $K^{\{1,\ldots,n\}} = \{(f_1, \ldots, f_n) : f_i \in K\} = K^n$, $K^{\mathbb{N}} = \{(f_i)_{i\in\mathbb{N}} : f_i \in K\}$

(c) $K^{(\mathbb{N})} \subseteq K^{\mathbb{N}}$ ist isomorph zum VR aller (formalen) Polynome: $f \equiv \sum_i f(i)X^i$
(d) VR alle konvergenten komplexen Folgen $c_0 \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
(e) VR aller stetigen Funktionen $C(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$;
$\{f \in C(\mathbb{R}) : f(3) = \lambda\}$ ist ein affiner UR; ein UR genau dann, wenn $\lambda = 0$
(f) VR aller *Polynomabb.*

$$\mathcal{P}(K) = \{f\colon K \to K,\ \lambda \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in K\}.$$

Achtung: $K^{(\mathbb{N})} \ncong \mathcal{P}(K)$, *falls* $|K| < \infty$

Frage 1.3.5. *Was sind (affine) URe des* $\mathbb{R}^n$*?* **(HA)**

Frage 1.3.6. *Welche Konstruktionen mit URen kennen Sie?*
Schnitt und (direkte) Summe **(HA)**