2. Termin am 22.10.

- lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension
- lineare Abbildungen
- Matrixdarstellung linearer Abbildungen

2.1. **Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension.**

Frage 2.1.1. *Was ist eine Basis eines K-VRs V?*
Ein Teilmenge $B \subseteq V$, die folgende äq. Bedingungen erfüllt:

(a) B ist ein linear unabh. Erzeugendensystem
(b) B ist eine maximale linear unabhängige TM
(c) B ist ein minimales Erzeugendensystem
(d) jedes $v \in V$ lässt sich (bis auf Umnummerierung) auf genau eine Weise als Linearkombination

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \tag{1}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ schreiben, d.h.

$$s_B \colon K^{(B)} \to V, \ f \mapsto \sum_{b \in B} f(b)b,$$

ist bijektiv.

Wie beweist man die Äquivalenz von (a)–(d)? **(HA)**
Dabei: B linear unabhängig/Erzeugendensystem $\Leftrightarrow$ s_B ist injektiv/surjektiv.

Frage 2.1.2. *Wie prüft man, ob ein geg. Tupel $B = (b_1, \ldots, b_m) \in K^n$ linear unabh./ein Erz.-System ist?*
Später: Bestimme Rang der Matrix B durch Umformung auf Zeilenstufenform.

Frage 2.1.3. *Was ist die lineare Hülle $LH(B)$ einer TM $B \subseteq V$?* **(HA)**
Das Bild von s_B, das ist auch der kleinste B enthaltende UR.

Frage 2.1.4. *Hat jeder VR eine Basis?*
Ja: Für jede Kette l.u. TMen $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots$ von V ist auch $B := \bigcup_n B_n$ l.u.; Lemma von Zorn (benutzt Auswahlaxiom) $\Rightarrow$ $\exists$ maximale l.u. TM. von V.

Frage 2.1.5. *Was sagt der Basisergänzungssatz?*
Jede l.u. Menge B_0 lässt sich zu einer Basis ergänzen: Beweis ähnlich wie oben.

Frage 2.1.6. *Was ist die Dimension eines VR? Warum ist sie wohldefiniert?*
Für je zwei Basen B, C von V gilt $|B| = |C| =: \dim V$.
Die erste Gleichheit folgt aus dem Austauschsatz von Steinitz **(HA)**:

> Sei B eine Basis des VR V und $S \subseteq V$ l.u..
> Dann ex. $T \subseteq B$ mit $|T| = |S|$ so, dass $(B \setminus T) \cup S$ eine Basis ist.

Und zwar so: Für $S := C$ folgt $|B| \geq |T| = |C|$, wegen Symmetrie folgt $|B| = |C|$.

Beispiel. (a) $\dim K^{(I)} = |I|$ *und* $B = \{\delta_x : x \in I\}$ *ist eine Basis, wobei* $\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, \textit{sonst}. \end{cases}$

(b) *Für* $|K| < \infty$ *ist* $\dim \mathcal{P}(K) \leq |K|^{|K|}$ *aber* $\dim K^{(\mathbb{N})} = \infty$

Frage 2.1.7. *Was besagt die Dimensionsformel für UR?* **(HA)**
Für URe $V, W \subseteq U$ gilt $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$.
Beweisidee: Wähle Basis B von $V \cap W$, ergänze zu Basen $B \cup C$ von V und $B \cup D$ von W; dann ist $B \cup C \cup D$ Basis von $V + W$.

Frage 2.1.8. *Andere Anwendung des Basisergänzungssatzes?*
Zu jedem Unterraum $W \subseteq V$ ex. ein Komplement(erraum) $U \subseteq V$ mit $V = W \bigoplus U$. **(HA)**

2.2. Lineare Abbildungen.

Frage 2.2.1. *Was ist eine lineare Abbildung?*
Eine Abb. f zwischen K-VRen V, W s.d.

$$\forall \lambda \in K, v, v' \in V : f(\lambda v) = \lambda f(v),\ f(v + v') = f(v) + f(v').$$

Die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ der lin. Abb. ist ein K-VR mit

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \qquad (\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v).$$

Frage 2.2.2. *Was ist ein Isomorphismus?* **(HA)**
Eine bijektive lin. Abb.; deren Umkehrabb. ist automatisch auch linear.

Frage 2.2.3. *Beispiele?*

(a) Jede Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{m \times n}$ definiert eine lin. Abb.

$$K^n \to K^m,\ (x_j)_j = x \mapsto Ax := (\sum_j a_{ij} x_j)_j$$

(b) Integration:

$$C([a, b]) \to \mathbb{C},\ g \mapsto \int_a^b g(x)dx$$

(c) Ableiten formaler Polynome:

$$K^{(\mathbb{N})} \to K^{(\mathbb{N})},\ \sum_n a_n X^n \mapsto \sum_n n a_n X^n$$

(d) Auswertung formaler Polynome an einer Stelle $\lambda \in K$:

$$K^{(\mathbb{N})} \to K,\ \sum_n a_n X^n \mapsto \Sigma_n a_n \lambda^n$$

(e) Die Abb. $s_B \colon K^{(B)} \to V$ für $B \subseteq V$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ B ist eine Basis.

Frage 2.2.4. *Wie hängen der Kern und Injektivität einer lin. Abb. zusammen?* **(HA)**

Frage 2.2.5. *Was besagt die Dimensionsformel für lin. Abb.?*

Zunächst: $\ker f \subseteq V$ und $f(V) \subseteq W$ sind URe. **(HA)**
Für f wie oben gilt $\dim V = \dim\ker f + \underbrace{\dim f(V)}_{=\mathrm{Rang}(f)}$.
Beweisidee: Wähle Basis B von $\ker f$ und ergänze zu Basis $B \cup C$ von V; dann gilt:

- f ist auf $LH(C)$ injektiv, also $|f(C)| = |C|$
- $f(C)$ eine Basis von $f(V)$.

Falls $V = W$ und $\dim(V) < \infty$, so folgt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \dim\ker f = 0 \Leftrightarrow \dim f(V) = \dim V \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}.$$

Frage 2.2.6. *Wodurch ist eine lin. Abbildung eindeutig bestimmt?*
Ist $f\colon V \to W$ linear und B Basis von V, so gilt $f|_B$ eindeutig bestimmt durch

$$f(\sum_i \lambda_i b_i) = \sum_i \lambda_i f(b_i). \tag{2}$$

Umgekehrt definiert (2) für jede Wahl von $f|_B$ eine lin. Abb. f.
Erhalten damit lin. Isomorphismus $\mathrm{Hom}(V, W) \to W^B = \{\text{Abb.} B \to W\}$, $f \mapsto f|_B$.

2.3. **Matrixdarstellung linearer Abbildungen.**

Frage 2.3.1. *Wie kann man lineare Abbildungen durch Matrizen beschreiben?*
Sei $f\colon V \to W$ lin. Abb. V, W endlich-dim., $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Basen von V bzw. W.
Bzgl. B und C kann man jedes $v \in V$, $w \in W$ durch die Koordinatenvektoren

$${}_B[v] := s_B^{-1}(v), \qquad {}_C[w] := s_C^{-1}(w)$$

darstellen.
Insbes. ex. eindeutige $\lambda_{ij} \in K$ mit

$$f(b_j) = \sum_i \lambda_{ij} c_i, \quad \text{d.h. } {}_C[f(b_j)] = (\lambda_{ij})_i \in K^m,$$

und die Matrix von f bzgl. B, C ist

$${}_C[f]_B = ({}_C[f(b_1)] \ \cdots \ {}_C[f(b_n)]) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}.$$

Das Diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "s_B"] \arrow[r, "x \mapsto {}_C[f]_B x"'] & K^m \arrow[u, "s_C"'] \end{tikzcd},$$

kommutiert, also

$${}_C[f(v)] = {}_C[f]_B \cdot {}_B[v],$$

denn $f(\sum_j \mu_j b_j) = \sum_j \lambda_{ij}\mu_j c_j$.

Frage 2.3.2. *Beispiele?*

(a) Spiegelung im R^2 an x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) Drehung im R^2 um $\pi/2$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Frage 2.3.3. *Was bedeutet dabei die Matrixmultiplikation?*
Ist $g\colon W \to U$ lin. Abb., D geordnete Basis von U, so gilt

(3) $$_D[g \circ f]_B = \underbrace{_D[g]_C}_{=(\mu_{ij})_{ij}} \circ _C[f]_B,$$

denn

$$(g \circ f)(b_j) = \sum_i g(\lambda_{ij} c_i) = \sum_i \lambda_{ij} g(c_i) = \sum_i \sum_k \lambda_{ij} \mu_{ki} d_k = \sum_k \big(\sum_i \mu_{ki} \lambda_{ij} \big) d_k.$$

Frage 2.3.4. *Wie hängt die Matrix von den Basen ab?*
Obiges liefert

$$_{C'}[f]_{B'} = {_{C'}[\mathrm{id}_W]_C} \cdot {_C[f]_B} \cdot {_{B'}[\mathrm{id}_V]_B}$$

und $_{B'}[\mathrm{id}_V]_B = {_B[\mathrm{id}_V]_{B'}}^{-1}$.
Im Fall $V = W$, $B = C$, $B' = C'$ ist also $_{B'}[f]_{B'} = S \cdot {_B[f]_B} \cdot S^{-1}$ für $S = {_{B'}[\mathrm{id}]_B}$, d.h. die Matrizen $_{B'}[f]_{B'}$ und $_B[f]_B$ sind ähnlich.

Frage 2.3.5. *Beispiele?*

(a) $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von K^n, $C = E$ Standardbasis $\Rightarrow$

$$_E[\mathrm{id}]_B = ({_E[b_1]} \ \cdots \ {_E[b_n]}) = (b_1 \ \cdots \ b_n) = B,$$

denn $_E[v] = v$ für alle $v \in K^n$

(b) B, C Basen von $K^n \Rightarrow {_C[\mathrm{id}]_B} = {_C[\mathrm{id}]_E} \cdot {_E[\mathrm{id}]_B} = C^{-1} \cdot B$ nach (a) und 1.3.3, 1.3.4.