3. Termin am 29.10.

- lineare Gleichungssysteme
- Dualraum und Transponieren
- Rang und Invertierbarkeit von Matrizen
- Determinanten (Anfang)

3.1. **Lineare Gleichungssysteme (35min).**

Frage 3.1.1. *Was ist ein lin. GLS und welche Struktur hat die Menge der Lösungen?*
Ein lin. GLS hat die Form

$$Ax = b \text{ mit geg. } A \in K^{m\times n}, b \in K^m \text{ und ges. } x \in K^n.$$

- $b = 0$: homogenes GLS; Lösungsmenge ist der UR $\ker(x \mapsto Ax) \subseteq K^n$;
- $b \neq 0$: inhomogenes GLS; Lösungsmenge ist affiner UR
  (spez. Lösung + Lösungsraum des homog. GLS).

Frage 3.1.2. *Was kann man über die Lösbarkeit sagen?*
Im Fall $n > m$ gilt nach Dimensionsformel $\dim\ker(x \mapsto Ax) \geq n - m$. Ansonsten: Siehe später beim Rang von Matrizen.

Frage 3.1.3. *Wie löst man ein lin. GLS?*
Gaußscher Algorithmus **(HA)**: bringe $(A\ b)$ in Zeilenstufenform durch *Elementarumformungen*

(a) Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile
(b) Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in K$
(c) Addition des λ-fachen der i-ten zur j-ten Zeile;

ergibt äquivalentes GLS; entspricht Multiplikation von $(A\ b)$ von links mit *Elementarmatrizen* **(HA)**.

GLS eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ man erreicht die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Insbesondere ist jede invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen.

Frage 3.1.4. *Anwendungen?*

(a) Koordinatenvektor $b \in K^n$ bzgl. einer geordneten Basis $A = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$:
Löse $Ax = b$ mit $A = (a_1\ \ldots\ a_n)$, dann $x = {}_A[b] = s_A^{-1}(b)$.

(b) Prüfen auf Invertierbarkeit/Invertieren einer Matrix $A \in K^{n\times n}$:
- $(A|E_n)$ (mit $E_n \in K^{n\times n}$ Einheitsmatrix) auf Form $(E_n|X)$ bringen
- erhalten $AX = E_n$, also X Rechtssinverses von A; sehen später: A hat auch Linksinverses Y; dann $X = Y = A^{-1}$.

Frage 3.1.5. *Beispiele?*

Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmung der Inversen und des Koordinatenvektors von $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$: Durch Zeilenumformungen bringen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

auf

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

mit $\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}}_{=A^{-1}}$ und $\underbrace{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}}_{={}_A[b]}$

- Bestimmung der Matrix der linearen Abbildung f, gegeben durch

$$f(a_1) = a_1 + 2a_2, \qquad f(a_2) = a_3, \qquad f(a_3) = a_1 - a_2.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
{}_A[f]_A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
{}_E[f]_E &= {}_E[\mathrm{id}]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}]_E = A \cdot_A [f]_A \cdot A^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.2. **Dualraum und Transponieren (10min).**

Frage 3.2.1. *Was ist der Dualraum V^* eines VR V? Welche Dimension hat V^*?*

Dualraum ist $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$.
Sei B eine Basis von V. Mit **??** folgt: $V^* \cong K^B$. Im Fall $\dim V < \infty$ folgt mit **??** (e): $V \cong K^{(B)} = K^B \cong V^*$, also $\dim V = |B| = \dim V^*$.
Konkreter: Nach **??** ex. für jedes $b \in B$ genau eine lin. Abb. $b^* \colon V \to K$ mit

$$b^*(b) = 1, \qquad \forall b' \in B, b' \neq b : b^*(b') = 0.$$

- $\dim V < \infty$: $B^* = \{b^* : b \in B\}$ ist eine Basis von V^*, die zu B duale Basis: **??** liefert

$$\forall \phi \in V^* : \phi = \sum_i \phi(b_i) b_i^*, \quad {}_{B^*}[\phi] = (\phi(b_i))_i. \tag{1}$$

- $\dim V = \infty$: B^* ist lin.unabh., aber kein Erzeugendensystem

Frage 3.2.2. *Was ist eine duale Abbildung?*

Ist $f : V \to W$ lin. Abb., so ist die duale Abb. $f^* \colon W^* \to V^*$ geg. durch $f^*(\phi) = \phi \circ f$.

Frage 3.2.3. *Was hat das mit dem Transponieren von Matrizen zu tun?*

Hat $f : V \to W$ bzgl. Basen B, C die Matrix ${}_C[f]_B =: (\lambda_{ij})_{ij}$, so gilt ${}_{B^*}[f^*]_{C^*} = ({}_C[f]_B)^T = (\lambda_{ij})_{ji}$, denn aus (1) folgt:

$$f^*(c_i^*) = \sum_j (c_i^* \circ f)(b_j) b_j^* = \sum \lambda_{ij} b_j^*.$$

Frage 3.2.4. *Wie hängen Kern und Bild von f^* mit dem Kern und Bild von f zusammen?*

3.3. **Rang und Invertierbarkeit von Matrizen (20min).**

Frage 3.3.1. *Was ist der Rang einer Matrix? Wichtige Eigenschaften?*
Spaltenrang:

$$SR(A) = \underbrace{\dim \underbrace{LH(\text{Spalten von } A)}_{\text{Bild}(x \mapsto Ax)}}_{= \text{Rang}(x \mapsto Ax)}$$

Zeilenrang:

$$ZR(A) = \dim LH(\text{Zeilen von } A)$$

Wichtig: $SR(A) = ZR(A)$.
Für invertierbare $S \in K^{m \times m}, T \in K^{n \times n}$ folgt:

$$SR(SAT) = \dim(SATK^n) = \dim(SAK^n) = \dim(AK^n) = SR(A);$$

mit Transponieren folgt analoges für Zeilenrang.

Frage 3.3.2. *Wie zeigt man Spaltenrang=Zeilenrang? Wie bestimmt man den Rang?*
Gaußscher Algorithmus $\Rightarrow \exists\, T \in K^{n \times n}$ invertierbar s.d. AT Zeilenstufenform hat; dann

$$SR(A) = SR(AT) = \text{Anzahl v. Zeilen ungleich 0 in } AT = ZR(AT) = ZR(A).$$

Frage 3.3.3. *Was heißt und wie prüft man Invertierbarkeit einer Matrix?*
$A \in K^{n \times n}$ ist invertierbar

$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in K^{n \times n} : A^{-1}A = E_n = AA^{-1}$
$\Leftrightarrow$ die lin. Abb. $x \mapsto Ax$ ist bijektiv

Dimensionsformel für lin. Abb. liefert

$\Leftrightarrow$ die lin. Abb. $x \mapsto Ax$ ist injektiv oder surjektiv
$\Leftrightarrow$ A hat vollen Rang n oder ihr Kern ist trivial

Frage 3.3.4. *Wie prüft man, ob ein Tupel $B = (b_1, \ldots, b_n) \in K^m$ lin. unab./ein Erzeugendensystem ist?*
Berechne den Rang der Matrix $B = (b_1 \ \cdots \ b_n)$:

- $< n$: linear abhängig;
- $= m$: Erzeugendensystem.

Frage 3.3.5. *Was kann man über die Lösbarkeit eines GLS $Ax = b$ sagen?*
Für $A \in K^{m\times n}$:

- $\mathrm{Rang}(A \ b) = \mathrm{Rang}(A) \Leftrightarrow LH(a_1 \ \cdots a_n \ b) = LH(a_1 \ \cdots \ a_n) \Leftrightarrow b \in LH(a_1 \cdots \ a_n) \Leftrightarrow$ Lösbarkeit
- A $n \times n$-Matrix und $\mathrm{Rang}(A) = n \Leftrightarrow$ eindeutige Lösbarkeit.

3.4. **Determinanten (35min).**

Frage 3.4.1. *Was ist eine Determinante?*
Die Determinante $\det_n$ auf $K^{n\times n}$ ist Abb.

$$\det_n \colon K^{n\times n} = K^n \times \cdots \times K^n \to K,$$

die

(a) multilinear (linear in jeder Komponente) ist,
(b) $\det_n(A) = 0$ erfüllt, falls $\mathrm{Rang}(A) < n$,
(c) normiert ist: $\det_n(E_n) = 1$.

(b) $\Rightarrow$

(d) $\det_n$ ist alternieren: wechselt Vorzeichen bei Vertauschung von zwei der n Komponenten.

Wir nehmen nun stets $\mathrm{char} K \neq 2$ an, dann gilt (d)$\Rightarrow$(b).

Frage 3.4.2. *Wieso ist die Determinante eindeutig?*
Durch elementare Spaltenumformungen kann man jede invertierbare Matrix zu E_n umformen; bei jeder Umformung ist die Änderung der Determinante durch (a)–(d) vorgeschrieben.

Frage 3.4.3. *Wie kann man die Determinante berechnen?*

(a) Leibniz-Formel: $\det_n(A) = \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$
(b) Entwicklung nach Reihe/Spalte **(HA)**
(c) Sarrus-Regel im Fall $n = 2, 3$

Frage 3.4.4. *Was ist das Signum einer Permutation?*

sgn: $S_n \to \{1, -1\}$ kann man def. durch

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{i<j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

und man kann folgern:

(a) Signum jeder Transposition ist -1

(b) Signum ist ein Gruppenhomomorphismus

(a)+(b) $\Rightarrow$ das Signum eines Produkts von k Transpositionen $(-1)^k$

Frage 3.4.5. *Was ist ein Gruppenhomomorphismus?*

Eine "strukturerhaltende Abbildung": ein $f : G_1 \to G_2$ s.d.

$$\forall g, g' \in G_1 : f(g *_1 g') = f(g) *_2 f(g')$$

So ein f bewahrt neutrales Element/Inverse **(HA)**.