Themen dieser Woche

Wir betrachten für quadratische Matrizen und Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume folgende Themen:

- Determinante
- Eigenwerte, Eigenräume und charakteristisches Polynom
- Diagonalisierbarkeit
- (verallgemeinerte Eigenräume)
- Minimalpolynom

Themen nächster Woche

- Polynomringe, Hauptidealringe, euklidische Ringe
- Minimalpolynom
- Normalformen von Matrizen/Endomorphismen

Was ist die geometrische Bedeutung der Determinante?

Idee Je n Vektoren $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$ erzeugen einen "Spat"

$$\mathrm{Spat}(b_1, \ldots, b_n) = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i : \lambda_i \in [0,1]\right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Nun ist $\det(b_1, \ldots, b_n) = \mathrm{Vol}(\mathrm{Spat}(b_1, \ldots, b_n))$.

Begründung Wie definiert man $\mathrm{Vol}(\mathrm{Spat}(b_1, \ldots, b_n))$?
Dieses orientierte Volumen sollte

- linear abhängig von jedem b_i sein, also multilinear,
- alternierend sein (deswegen orientiert),
- verschwinden, wenn die b_i linear abhängig sind,
- normiert sein (der Einheitsspat hat Volumen 1).

Aber das sind gerade auch die definierenden Eigenschaften der Determinante $\det(b_1, \ldots, b_n)$.

Welche Rechenregeln kennen Sie für Determinanten?

- Es gilt *nicht* $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$!
  (Die Determinante ist nicht linear, sondern multilinear).
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ (wegen Multilinearität)
- (Produktregel) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
  Begründung Sei $A = (a_1 \ \ldots \ a_n)$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$.
  Dann ist $AB = \left(\sum_i a_i b_{1i} \ \ldots \ \sum_i a_i b_{ni}\right)$. Multlinearität liefert:

$$\begin{aligned}\det\left(\left(\sum_i a_i b_{1i} \ \ldots \ \sum_i a_i b_{ni}\right)\right) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{1i_1}\cdots b_{ni_n}\det(a_{i_1} \ \ldots \ a_{i_n})\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)}\det(a_1 \ \ldots \ a_n)\\ &= \det(B)\det(A).\end{aligned}$$

Wie kann man die Produktregel $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ anwenden?

1. Ist A invertierbar, so folgt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$,
   denn $\det(A)\det(A)^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det(E_n) = 1$
2. Berechnung der Determinante einer Blockmatrix:
   $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & E_n\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$
3. Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante:
   $\det(SAS^{-1}) = \det(S)\cdot\det(A)\cdot\det(S)^{-1} = \det(A)$
4. Ist f ein Endomorphismus eines endlich-dim. Vektorraumes V,
   so ist $\det(f) := \det({}_B[f]_B)$ unabhängig von der Wahl von B:
   für jede andere Basis C ist $\det({}_C[f]_C) = \det({}_B[f]_B)$
   (verwende 3. mit $A ={}_B [f]_B$ und $S ={}_C [\mathrm{id}]_B$)

Was besagt die Cramersche Regel?

Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit invertierbarem $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$ ist die Lösung x gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad \text{mit } A_i = \underbrace{(a_1 \ \dots \ a_{i-1} \ b \ a_{i+1} \ \dots \ a_n)}_{b \text{ in } i\text{-ter Spalte}}$$

Begründung Gilt $Ax = b$, so folgt

$$\begin{aligned} x_i \det(A) &= \det(a_1 \ \dots \ a_{i-1} \ x_i a_i \ a_{i+1} \ \dots \ a_n) \\ &= \det(a_1 \ \dots \ a_{i-1} \ \sum_j x_j a_j \ a_{i+1} \ \dots \ a_n) \\ &= \det(a_1 \ \dots \ a_{i-1} \ b \ a_{i+1} \ \dots \ a_n) \end{aligned}$$

Die Spur

Was ist die Spur einer Matrix? Die Spur von $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Welche Eigenschaften hat die Spur?

- $\mathrm{Spur}(\lambda A + \mu B) = \lambda\,\mathrm{Spur}(A) + \mu\,\mathrm{Spur}(B)$
- $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, denn $\mathrm{Spur}(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji}$ und $\mathrm{Spur}(BA) = \sum_k \sum_l b_{kl} a_{lk}$
- ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur: $\mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \mathrm{Spur}(ASS^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$
- deswegen kann man die Spur eines linearen Endomorphismus f eines endlich-dim. VRs definieren durch $\mathrm{Spur}(f) := \mathrm{Spur}({}_B[f]_B)$

Eigenwerte, -vektoren, -räume und charakteristische Polynome

Was ist ein Eigenwert/Eigenvektor/Eigenraum einer Matrix?
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

- Gilt $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so heißt λ Eigenwert, v Eigenvektor.
- äquivalent: $(A - \lambda)v = 0$, also liegt v in dem nichttrivialen
  $\ker(A - \lambda E_n) =$ Eigenraum von A zum Eigenwert λ

Wie bestimmt man die Eigenwerte/Eigenvektoren einer Matrix?
Man nutzt die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. λ ist Eigenwert von A
2. $A - \lambda E_n$ ist nicht invertierbar
3. $\det(A - \lambda E_n) = 0$
4. λ ist Wurzel des charakt. Polynoms $\chi_A(x) = \det(A - xE_n)$
   (Leibniz-Formel $\rightsquigarrow$ $\chi_A(x)$ ist Polynom höchstens n-ten Grades)

Also berechnet man $\chi_A(x)$, bestimmt dessen Wurzeln und erhält damit alle Eigenwerte von A.

Diagonalisierbarkeit und Determinante und Spur

Wann heißt eine Matrix diagonalisierbar?
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls $S \in GL_n(\mathbb{K})$ so existiert, dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{für gewisse } \lambda_i.$$

Wie kann man Determinante und Spur einer diagonalisierbaren Matrix berechnen?
Sind A und S wie oben, so folgt

- $\det(A) = \det(S^{-1}AS) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, die Determinante ist das Produkt aller Eigenwerte (mit Vielfachheit genommen)
- $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, die Spur ist die Summe aller Eigenwerte (mit Vielfachheit genommen)

Welche Kriterien gibt es für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix?

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar
2. $\mathbb{K}^n$ hat eine Basis aus Eigenvektoren von A
3. die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von A ist n, also $\sum_\lambda \dim\ker(A-\lambda E_n) = n$.

Beweis 1.⇔2.: Ist $S = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ invertierbar, so gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AS = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Av_i = \lambda_i v_i$$

2.⇔3. Es genügt, zu zeigen: *Eigenvektoren $v_1, \dots, v_k$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sind stets linear unabhängig:* Aus $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k = 0$ folgt für jedes j nach Anwendung von $\prod_{i\neq j}(A-\lambda_i)$ die Gleichung $\prod_{i\neq j}(\lambda_j - \lambda_i)\mu_j v_j = 0$

Verallgemeinerte Eigenräume und nilpotente Matrizen

Was ist der Hauptraum/verallgem. Eigenraum zu einem Eigenwert?
Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und einen EW $\lambda \in K$ ist das $\bigcup_l \ker((A-\lambda E_n)^l)$.
Dabei gilt:

1. $\ker(A-\lambda E_n) \subseteq \ker(A-\lambda E_n)^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker(A-\lambda E_n)^k = \ker(A-\lambda E_n)^{k+1} = \bigcup_l \ker((A-\lambda E_n)^l)$ für ein k, also
2. für $v \in \ker(A-\lambda E_n)^l$ gilt $(A-\lambda E_n)v \in \ker(A-\lambda E_n)^{l-1}$, insbesondere $Av \in \ker(A-\lambda E_n)^l$
3. wegen 2. kann man A und $B := A - \lambda E_n$ auf $W := \ker(A-\lambda E_n)^k$ einschränken und $B^k|_W = 0$, d.h. $B|_W$ ist nilpotent
4. nächste Woche: $\mathbb{K}^n = \bigoplus_\lambda$(verallgem. Eigenraum zu λ)