Themen dieser Woche

Wir betrachten folgende Themen:

- Bilinearformen und deren Darstellung durch Matrizen
- Skalarprodukte und euklidische/hermitesche Vektorräume
- Orthonormalbasen
- orthogonale/unitäre Matrizen und Abbildungen

Themen nächster Woche

- Hauptachsentransformation
- quadratische Formen und Quadriken
- Wechsel zur Analysis: Metrische Räume

Frage **Was ist eine Bilinearform?**

Eine Bilinearform auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$, die in jeder Komponente linear ist, d.h.

$$\Phi(v + \lambda v', w) = \Phi(v, w) + \lambda\Phi(v', w), \quad \Phi(v, w + \mu w') = \dots$$

Frage **Was sind wichtige Beispiele?**

- das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: $\Phi(x, y) = \sum_i x_i y_i$
- zweite Ableitung $f''(x)$ (falls existent) einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
  $f(x + x') = f(x) + f'(x)x' + f''(x)(x', x') + R(x')$ mit $\lim\limits_{x' \to 0} \frac{R(x')}{\|x\|^2} = 0$
- auf $C([a, b])$ die Abbildung $\Phi(f, g) := \int_a^b f(t)g(t)\sin(t)dt$

Frage **Sind Φ und Ψ Bilinearformen auf $\mathbb{R}^3$?**

- $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_1^2y_3 + x_3y_2$ nein
- $\Psi(x, y) = x_1y_3 - x_2y_1$ ja

Frage **Wie stellt man eine Bilinearform durch eine Matrix dar?**

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis und $v = \sum_i \lambda_i b_i$, $w = \sum_i \mu_i b_i$.

$$\Phi(v, w) = \Phi\Big(\sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j\Big) = \sum \lambda_i \mu_j \Phi(b_i, b_j)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(b_1,b_1) & \cdots & \Phi(b_1,b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi(b_n,b_1) & \cdots & \Phi(b_n,b_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = {}_B[v]^T \cdot {}_B[\Phi]_B \cdot {}_B[w]$$

Umgekehrt definiert jede Matrix eine Bilinearform — die Zuordnung $\Phi \leftrightarrow {}_B[\Phi]_B$ ist eine Bijektion zwischen Bilinearformen und Matrizen.

Beispiel ${}_{E_n}[f''(x)]_{E_n} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j}$ für 2-mal diff.bares $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Frage **Wie hängt die Matrix von der Basis ab?**

Für Basen B, C gilt ${}_B[\Phi]_B = ({}_C[\mathrm{id}]_B)^T \cdot {}_C[\Phi]_C \cdot {}_C[\mathrm{id}]_B$:

$$\begin{aligned} {}_C[v]^T \cdot {}_C[\Phi]_C \cdot {}_C[w] &= ({}_C[\mathrm{id}]_B \cdot {}_B[v])^T \cdot {}_C[\Phi]_C \cdot ({}_C[\mathrm{id}]_B \cdot {}_B[w]) \\ &= {}_B[v]^T \cdot ({}_C[\mathrm{id}]_B)^T {}_C[\Phi]_C ({}_C[\mathrm{id}]_B) \cdot {}_B[w] \\ &\stackrel{!}{=} {}_B[v]^T \cdot {}_B[\Phi]_B \cdot {}_B[w] \end{aligned}$$

Frage **(1) Wann heißt eine Bilinearform/Matrix positiv definit? (2) Wozu betrachtet man das?**

Zu (2): Lokale Extrema von $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mittels $f''(x)$ bestimmen.

Zu (1): Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt eine Bilinearform Φ

- positiv definit $:\Leftrightarrow \Phi(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$
- positiv semi-definit $:\Leftrightarrow \Phi(v, v) \geq 0$ für alle $v \neq 0$

Analog definiert man negativ definit und negativ semi-definit.

Tritt keiner der 4 Fälle ein, heißt Φ indefinit.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unterscheidet man die 5 Fälle für $x^T A x$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, man betrachtet also die Bilinearform $(x, y) \mapsto x^T A y$.

Frage **Beispiele?**

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit: $x^T A x = \begin{cases} 1, & x = (1,0)^T \\ -1, & x = (0,1)^T \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pos. semi-definit: $x^T A x = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$

Frage Was ist ein Skalarprodukt?

Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V ist im Fall

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine Bilinearform $\langle\cdot|\cdot\rangle$ auf V, die positiv definit und symmetrisch ist: $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle$ für alle $v, w \in V$
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform $\langle\cdot|\cdot\rangle$ auf V, die
  - linear in der ersten, konjugiert-linear in der zweiten Variable ist
  - positiv definit ist: $\langle v|v\rangle > 0$ für alle $v \neq 0$
  - hermitesch ist: $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$ für alle v, w

Frage Beispiele?

- Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$
- Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$: $\langle x|y\rangle = \sum_i x_i\overline{y_i}$
- L^2-Skalarprodukt auf $C([a, b])$: $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Bilinearform $\langle x|y\rangle := x^T Ay$ ein Skalarprodukt $\Leftrightarrow$ A ist positiv definit und symmetrisch: $A^T = A$
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Sesquilinearform $\langle x|y\rangle := x^T Ay$ ein Skalarprodukt $\Leftrightarrow$ A ist positiv definit und hermitesch: $A^* = A$

Frage Wozu ist ein Skalarprodukt gut?

Mit einem Skalarprodukt kann man Folgendes definieren:

- die Länge oder Norm eines Vektors: $\|v\| := \langle v|v\rangle^{1/2}$.
  Eine Norm auf einem VR V ist eine Abb. $\|\cdot\|\colon V \to [0, \infty)$, die
  - positiv homogen ist: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
  - definit ist: $\|v\| = 0 \quad\Leftrightarrow\quad v = 0$
  - subadditiv ist: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)
- den Abstand $\|v - w\|$ zweier Vektoren v, w
- im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ den Winkel $\measuredangle(v, w)$ zwischen zwei Vektoren v, w, gegeben durch $\langle v|w\rangle = \cos(\measuredangle(v, w)) \cdot \|v\| \cdot \|w\|$
- zwei Vektoren v, w sind orthogonal, also $v \perp w$, falls $\langle v|w\rangle = 0$.

Für das Standardskalarprodukt stimmen diese Definitionen mit den geometrischen Vorstellungen überein!

Frage Was besagt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung?

Es gilt $|\langle v|w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$. Kurzer Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\frac{\langle v|w\rangle^2}{\langle w|w\rangle^2} \leq \frac{\langle v|v\rangle}{\langle w|w\rangle}$ folgt aus $0 \leq \langle v - tw|v - tw\rangle = \langle v|v\rangle - 2t\langle v|w\rangle + t^2\langle w|w\rangle$ für $t \in \mathbb{R}$

Frage Was ist eine Orthonormalbasis?

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt orthonormal, falls $\|b\| = 1$ und $b \perp b'$ für alle $b, b' \in B$ mit $b' \neq b$.

Frage Was macht das Gram-Schmidt-Verfahren?

Eingabe: linear unabhängige $v_1, v_2, \ldots \in V$
Ausgabe: orthonormale $b_1, b_2 \ldots$ mit
lineare Hülle$\{b_1, \ldots, b_i\}$ = lineare Hülle$\{v_1, \ldots, v_i\}$ für alle i
Vorgehen: Seien $b_1, \ldots, b_i$ bereits konstruiert. Dann ist

- $b'_{i+1} := v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \langle v_{i+1} | b_j \rangle b_j$ orthogonal zu $b_1, \ldots, b_i$
- $b_{i+1} := b'_{i+1} / \|b_{i+1}\|$ zusätzlich normiert

Frage Wozu kann man das Verfahren anwenden?

Jeder Vektorraum V mit Skalarprodukt hat eine Orthonormalbasis; jeder Unterraum $U \subseteq V$ hat eine Orthonormalbasis.

Frage Was ist das orthogonale Komplement eines Unterraumes $U \subseteq V$ und was ist die orthogonale Projektion auf U?

Das Komplement ist $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U : \langle u|v \rangle = 0\}$.
Es gilt $V = U \oplus U^\perp$: Ist $b_1, \ldots, b_m$ eine Orthonormalbasis von U, so ist die orthogonale Projektion auf U die lineare Abbildung

$$p_U \colon V \to U, \; v \mapsto \textstyle\sum_i \langle v|b_i \rangle b_i$$

und es gilt $v - p_U(v) \in U^\perp$, also $v = \underbrace{p_U(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - p_U(v))}_{\in U^\perp}$.

Für alle $v \in V$ ist $p_U(v)$ der Vektor in U mit kleinstem Abstand zu v.

Frage Wie berechnet man den Abstand eines Punktes $u \in \mathbb{R}^n$ zu einer Geraden $G \subseteq \mathbb{R}^n$, gegeben durch $v, w \in G$ mit $v \neq w$?

Die Gerade ist der affine Unterraum $v + \mathbb{R}b$ mit $b = \frac{w-v}{\|w-v\|}$.
Wir verschieben u und den affinen Unterraum um $-v$.
Dann ist der Abstand von $(u - v)$ zu $\mathbb{R}b$ gesucht, und das ist

$$\|(u-v) - p_{\mathbb{R}b}(u-v)\| = \|(u-v) - \langle (u-v)|b \rangle b\|.$$

Seien V, W Vektorräume mit Skalarprodukt und $f\colon V \to W$ linear.

Frage **Was ist die adjungierte Abbildung zu f?**

Es gibt genau eine lin. Abb. $f^*\colon W \to V$, die zu f adjungierte, mit

$$\langle w | f(v)\rangle_W = \langle f^*(w)|v\rangle_V \text{ für alle } v \in V,\ w \in W.$$

- *Spezialfall:* Sei $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$ und $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Die zu A adjungierte Matrix ist $A^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und erfüllt $\langle y|Ax\rangle = \sum_i y_i\overline{(Ax)_i} = \sum_{i,j} y_i\overline{a_{ij}x_j} = \sum_j (A^*y)_j\overline{x_j} = \langle A^*y|x\rangle$.
- *Allgemein:* Wähle Orthonormalbasen B, C von V, W, setze $A := {}_C[f]_B$ und definiere f^* durch die Matrix ${}_C[f^*]_B := ({}_C[f]_B)^*$

Frage **Wann heißt f orthogonal/unitär?**

Wenn f bijektiv ist und folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:

1. f bewahrt alle Längen (und Winkel);
2. $\langle f(v)|f(v')\rangle = \langle v|v'\rangle$ für alle $v \in V$;
3. $f^{-1} = f^*$.

Frage **Was sind Beispiele für orthogonale Abbildungen?**

1. Drehungen, z.B. $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ um ϕ in x,y-Ebene im $\mathbb{R}^3$
2. Spiegelungen an Punkten/Geraden/Ebenen/..., z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ an der Ebene $x = z$ im $\mathbb{R}^3$

   Allgemein: Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum, also $V = U \oplus U^\perp$.
   Dann ist die Spiegelung an U die Abbildung
   $$\underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in U^\perp} \mapsto u - v$$
3. Verknüpfungen von Drehungen und Spiegelungen