Themen dieser Woche

- Kegelschnitte und Quadriken
- quadratische Formen und zugehörige Bilinearformen
- die Hauptachsentransformation
- Überganz zur Analysis: metrische Räume, Konvergenz

Themen nächster Woche

- Punktmengen
- Vollständigkeit und Kompaktheit
- Stetigkeit

Nachtrag zu Skalarprodukten:

Frage Was besagt der Satz vom Rechteck?

Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.
Beweis: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$, denn

$$\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y | x \pm y \rangle = \langle x|x\rangle \pm 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle$$

Frage Was besagt der Satz vom Rhombus?

Ein Parallelogramm hat genau dann gleich lange Seiten, wenn seine Diagonalen senkrecht stehen.
Beweis: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| = \|y\| \Leftrightarrow x + y \perp x - y$, denn

$$\langle x + y|x - y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|x\rangle - \langle x|y\rangle - \langle y|y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Frage Wie sieht die Gleichung eines Kegelschnittes aus?

- Gleichung für einen "Einheits-Kegel": $x^2 + y^2 = z^2$
- Gleichung für eine Ebene: $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by + cz = d$
- Fall $c = 0, b \neq 0$: Ebenengleichung $\Rightarrow (by)^2 = (d - ax)^2$,
  b^2·Kegelgleichung $\Rightarrow b^2z^2 = x^2(a^2 + b^2) - 2adx + d^2$
- Fall $c \neq 0$: Ebenengleichung $\Rightarrow cz = d - ax - by$
  c^2·Kegelgleichung $\Rightarrow c^2x^2 + c^2y^2 = (d - ax - by)^2$

Frage Was ist eine Quadrik? Was ist ein "typisches" Beispiel?

Eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$ ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms $P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{0i} X_i + \alpha_{00}$
$= X^T AX + \langle \alpha_0 | X \rangle + \alpha_{00}$,
also die Menge $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : P(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$.

Ein Beispiel sind offenbar Kegelschnitte.

Eine Quadrik ist die Nullstellenmenge eines Polynoms zweiten Grades

$$P(X_1, \ldots, X_n) = X^T AX + \langle \alpha_0 | X \rangle + \alpha_{00}.$$

Frage Was ist eine quadratische Form auf einem $\mathbb{R}$-VR V?

Eine Abbildung $q\colon V \to \mathbb{R}$ ist eine quadratische Form auf V, falls

- eine symmetrische Bilinearform Φ mit $q(v) = \Phi(v, v)$ existiert
- äquivalent: für eine/jede Basis B gibt es eine symmetrische Matrix A mit $q(v) = {}_B[v]^T \cdot A \cdot {}_B[v]$.

Die symmetrische Bilinearform Φ ist dann gegeben durch

$$\Phi_q(v, w) = \tfrac{1}{2} (q(v + w) - q(v) - q(w)).$$

Ist Ψ nicht-symm. Bilinearform, so ist auch $q(v) := \Psi(v, v)$ eine quadratische Form und $\Phi_q(v, w) = \frac{1}{2} (\Psi(v, w) + \Psi(w, v))$ symm.)

Wir erhalten also Bijektionen zwischen

- quadratischen Formen q auf $\mathbb{R}^n$
- symmetrischen Bilinearformen Φ auf $\mathbb{R}^n$
- symmetrischen Matrizen A in $\mathbb{R}^{n \times n}$

Eine Quadrik ist die Nullstellenmenge eines Polynoms zweiten Grades

$$P(X_1, \dots, X_n) = X^T A X + \langle \alpha_0 | X \rangle + \alpha_{00}.$$

Frage Was soll die affine/die isometrische Hauptachsen-Trafo?

Suche eine Koordinatentransformation f so, dass $P(f(x))$ eine besonders einfache Gestalt hat, genauer eine

- bijektive affin-lineare Abb. $f\colon x \mapsto Sx + v$ oder
- isometrische (=orthogonale) Abb. $f\colon x \mapsto Sx$ mit $S^T = S^{-1}$.

Im affin-linearen Fall gibt es stets ein f so, dass $P(f(x))$ eine der folgenden Formen hat:

- $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = 1 \qquad (1 \le k \le n)$
- $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0 \qquad (0 \le k \le n \le 2k)$
- $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2 = -2x_n \quad (1 \le k \le n-1 \le 2k)$

$\Rightarrow$ jede Quadrik ist affin-äquivalent zu einer dieser drei Gleichungen.

Im isometrischen Fall wird $P(Sx) = x^T \cdot (S^T A S) \cdot x + \langle S^T a_0 | x \rangle + \alpha_{00}$

Frage Was besagen der Satz über die isom. Hauptachsen-Trafo und der Spektralsatz für symmetrische Matrizen?

Das gleiche: Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine ON-Basis $S = (v_1 \ \dots \ v_n)$ aus Eigenvektoren, den Hauptachsen.

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte, so folgt:

- $S^{-1}AS = S^TAS = S^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- Bezüglich der Basis S hat
  - die quadratische Form $q_A\colon x \mapsto x^T A x$ die Form $y \mapsto \sum_i \lambda_i y_i^2$
  - die Bilinearform $\Phi_A\colon (x, y) \mapsto x^T A y$ die Form $(x, y) \mapsto \sum_i \lambda_i x_i y_i$.
- (Sylvesterscher Trägheitssatz) Bezüglich der Basisvektoren

  $$w_i = \begin{cases} v_i / \sqrt{|\lambda_i|}, & \lambda_i \neq 0, \\ v_i, & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

  ist die Gram-Matrix von Φ_A eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $+1, -1, 0$.

  Die Anzahl dieser Zahlen heißt *Trägheitsindex* von Φ_A.

Frage Was sind wichtige Ideen zum Beweis?

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, also $A = A^T$.

1. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: gilt $Av = \lambda v$ und $Aw = \mu w$ mit $\lambda \neq \mu$, so folgt $v \perp w$, denn

$$\lambda\langle v|w\rangle = \langle \lambda v|w\rangle = \langle Av|w\rangle = \langle v|A^T w\rangle = \langle v|Aw\rangle = \langle v|\mu w\rangle = \mu\langle v|w\rangle.$$

2. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $AU \subseteq U$, so folgt $AU^\perp \subseteq U^\perp$:

$$u \in U,\ v \in U^\perp \Rightarrow \langle u|Av\rangle = \langle A^T u|v\rangle = \langle \underbrace{Au}_{\in U} | \underbrace{v}_{\in U^\perp} \rangle = 0.$$

3. Man zeigt (durch Übergang zum Komplexen): Jede reelle symmetrische Matrix hat einen reellen Eigenwert.
4. *Beweis-Idee:* Wähle zu jedem reellen Eigenwert λ_i von A eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraumes $\ker(A - \lambda_i)$.
   Es genügt nun zu zeigen: $U := \bigoplus_i \ker(A - \lambda_i) = \mathbb{R}^n$.
   Aus 2. folgt $AU^\perp \subseteq U^\perp$. Wäre $U^\perp \neq 0$, enthielte $U^\perp$ nach 3. einen Eigenvektor zu einem reellen Eigenwert, Widerspruch.

Frage Was ist ein metrischer Raum?

Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Metrik, also einer Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Frage Was sind Beispiele metrischer Räume?

- $\mathbb{R}$ mit $d(x, y) := |x - y|$
- $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$, allgemein liefert diese Formel für jede Norm eine Metrik
- eine beliebige Menge X mit der diskreten Metrik
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$
- $\mathbb{R}^2$ mit der Manhattan-Metrik $d(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$

Frage **Wann konvergiert eine Folge in einem metrischen Raum?**

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X konvergiert gegen $x \in X$ genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \epsilon$.

Frage **Was bedeuted Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik?**

Komponentenweise Konvergenz.