Hinweis

Bis zum 31.12. können Sie sich bei Frau Anja Böckenholt zur mündlichen Modulabschlussprüfung im Modul 5 “Mathematik vermitteln und vernetzen” anmelden.

Themen dieser Woche

- Punktmengen
- Vollständigkeit und Kompaktheit
- Stetigkeit
- (Differenzierbarkeit im Eindimensionalen)

Themen nächster Woche

- Differenzierbarkeit im Eindimensionalen
- Reihen
- Potenzreihen
- Konvergenz von Funktionenfolgen

Konvergenz und Häufungspunkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum, z.B. $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \left(\sum_i |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$.

Was ist die ϵ-Umgebung eines Punktes $x \in X$?

Die Menge $U_\epsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$.

Wann konvergiert eine Folge $(x_n)_n$ gegen ein x in X?

Genau dann, wenn

- für jedes $\epsilon > 0$ fast alle x_n in $U_\epsilon(x)$ liegen
- d.h. $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : d(x, x_n) < \epsilon$

Wann ist ein x Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_n$ in X?

Genau dann, wenn

- für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele x_n in $U_\epsilon(x)$ liegen
- es eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ gibt, die gegen x konvergiert

Offene und abgeschlossene Mengen

Wann ist eine Menge $M \subseteq X$ offen/abgeschlossen?

- offen $\Leftrightarrow$ M für jedes $x \in M$ und jedes $\epsilon > 0$ gilt $U_\epsilon(x) \subseteq M$
- abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)_n$ in M, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, gilt $x \in M$

Was sind das Innere/der Abschluss/der Rand einer Menge M?

- das Innere ist $\overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subseteq M\}$
- der Abschluss ist $\overline{M} = \{x \in X \mid \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \cap M \neq \emptyset\}$
  und es gilt $X \setminus \overline{M} = (X \overset{\circ}{\setminus} M)$
- der Rand ist $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M} = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$

Vollständigkeit und Kompaktheit

Wann heißt eine Teilmenge M vollständig?

Falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in M gegen ein $x \in M$ konvergiert.

Wann heißt eine Teilmenge M kompakt? folgenkompakt?

M heißt

- kompakt, falls für jede Menge $\mathcal{U}$ offener Teilmengen von M mit $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = M$ (d.h. für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von M) endlich viele $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ existieren mit $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.
- folgenkompakt, falls jede Folge in M einen Häufungspunkt in M besitzt, also eine in M konvergente Teilfolge.

Suprema, Maxima und Vollständigkeit

Wann heißt $x \in \mathbb{R}$ obere Schranke/Supremum/Maximum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$?

- obere Schranke $\Leftrightarrow \forall y \in M : y \leq x$
- Supremum $\Leftrightarrow$ x ist die kleinste obere Schranke
- Maximum $\Leftrightarrow$ x ist das Supremum von M und liegt in M

Welche Eigenschaften von $\mathbb{R}$ sind äquivalent zur Vollständigkeit?

- Jede nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum.
- Jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge konvergiert.
- Das Intervallschachtelungsprinzip: Ist $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$ und $\lim_n b_n - a_n = 0$, so enthält $\bigcap_n [a_n, b_n]$ genau ein x

Quiz zu Punktmengen

1. Kann eine Folge zwei Grenzwerte haben? Begründung/Gegenbeispiel?
2. Kann eine Folge zwei Häufungspunkte haben? Begründung/Gegenbeispiel?
3. Ist $U_\epsilon(x)$ für jedes ϵ und jedes x offen? Warum (Stichwort)?
4. Was sind Inneres/Abschluss/Rand von $\mathbb{Q}$ und von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$?
5. Ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ vollständig? Kompakt?
6. Sei X eine Menge und d die diskrete Metrik: $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$. Was ist $U_{1/2}(x)$ für ein $x \in X$? Wann konvergiert eine Folge in (X, d)? Welche Teilmengen von X sind kompakt?
7. Was sind die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$? Wieso?
8. Gibt es abgeschlossene Intervalle $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ mit $\bigcap_n I_n = \emptyset$?
9. Wieso konvergiert jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$?

Definition von Stetigkeit

Wann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen stetig in $x \in X$?

Falls folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

(a) für jede Folge $(x_n)_n$ in X mit $\lim_n x_n = x$ gilt $\lim_n f(x_n) = f(x)$;

(b) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x' \in U_\delta(x) : f(x') \in U_\epsilon(f(x))$

Wie kann man Stetigkeit mit offenen Mengen charakterisieren?

f ist genau dann auf X stetig, wenn gilt:

(c) für jede offene Menge $V \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen.

Wieso sind die Bedingungen äquivalent?

Z.B. (c) $\Rightarrow$ (b): Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann ist $V := U_\epsilon(f(x))$ offen, also $f^{-1}(V)$ offen und $x \in U$, also ex. $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$ und für alle $x' \in U_{\delta(x)}$ ist $f(x') \in V = U_\epsilon(f(x))$.

Sätze über stetige Funktionen

Was ist gleichmäßige Stetigkeit? Ist sie äquivalent zu Stetigkeit?

$f : X \to Y$ ist gleichmäßig stetig, wenn

- $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind automatisch gleichmäßig stetig.

Was weiss man über Maxima von Funktionen auf kompakten Mengen?

Ist X kompakt (z.B. $X = [a, b]$) und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $z \in [a, b]$ mit $f(z) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Was besagt der Zwischenwertsatz?

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y \geq f(b)$, so gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Normen und deren Äquivalenz

Hängt die Konvergenz einer Folge im $\mathbb{R}^d$ von der Norm ab, die man betrachtet?

Nein, denn sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$, so existieren $\alpha, \beta > 0$ mit $\|x\|_1 \leq \alpha\|x\|_2$ und $\|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, d.h. die Normen sind äquivalent. Also gilt für jede Folge $(x_n)_n$ und jedes x:

$$\|x_n - x\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ genau dann, wenn } \|x_n - x\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Wieso sind je zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ äquivalent?

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm und $\|\cdot\|_\infty$ die Supremums-Norm. Dann ist

- die Abbildung $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ stetig,
- die $\|\cdot\|_\infty$-Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_\infty = 1\}$ kompakt,

also existieren $\alpha := \max\{\|x\| : x \in B\}$ und $\gamma := \min\{\|x\| : x \in B\}^{-1}$ und es folgt $\gamma\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \alpha\|x\|_\infty$.

Differenzierbarkeit

Wann heißt eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x?

Falls $\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} =: f'(x)$ existiert, d.h. f bei x linear approximiert werden kann.

Wie leitet man zusammengesetzte Funktionen ab?

Sind $f\colon (a,b) \to (c,d)$ in x und $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ in $f(x)$ diffbar, so ist $g \circ f$ in x diffbar und $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ (Kettenregel), denn:

Falls $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, so folgt $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ und

$$\frac{g(f(x_n))-g(f(x))}{x_n-x} = \underbrace{\frac{g(f(x_n)) - g(f(x))}{f(x_n) - f(x)}}_{\xrightarrow{n\to\infty} g'(x)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}}_{\xrightarrow{n\to\infty} f'(x)}$$

Prüfungs-Simulation zu zweit

Finden Sie sich paarweise zusammen und prüfen Sie sich abwechselnd je 5 Minuten zu den Themen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, z.B.:

1. Wo ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$ stetig?
2. Ein Beispiel für eine stetige Funktion, die nicht gleichmäßig stetig ist.
3. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Ist dann f eine Bijektion zwischen $[a, b]$ und $[f(a), f(b)]$?
4. Gibt es eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\{0, 1\}$? Von $\mathbb{Q}$ nach $\{0, 1\}$?
5. Ist das Bild eines kompakten/abgeschlossenen/offenen Intervalls unter stetigen Funktionen immer kompakten/abgeschlossen/offen?
6. Wenn f in x differenzierbar ist, muss dann f in x stetig sein? Wieso?
7. Wo ist die Betragsfunktion differenzierbar?
8. Wie berechnet man $(g \cdot f)'(x)$?