J. Cuntz und T. Timmermann SS 14

Übung zur K-Theorie
Blatt 1

Die folgenden Aufgaben könnten uns eine Weile beschäftigen.

Aufgabe 1. Sei X ein kompakter Raum und $P\colon X \to M_m(\mathbb{C})$ eine stetige Abbildung mit $P(x)^2 = P(x)$ für alle $x \in X$. Dann definieren wir ein Vektorbündel

$$E_P := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathrm{img} P(x) \subset X \times \mathbb{C}^m.$$

(a) Sei $x \in X$ und $e_1, \ldots, e_d$ eine Basis von $\mathrm{img}\, P(x)$. Zeigen Sie, dass dann die Bündel-Abbildung

$$\Phi\colon X \times \mathbb{C}^d \to X \times \mathbb{C}^m, \quad (y, \lambda) \mapsto \left(y, \sum_k \lambda_k P(y) e_k \right)$$

auf einer Umgebung U von x ein Isomorphismus von $U \times \mathbb{C}^d$ auf $E_P|_U$ ist. Konstruieren Sie dazu eine geeignete Bündel-Abbildung

$$\Psi\colon X \times \mathbb{C}^m \to X \times \mathbb{C}^d,$$

sodass $\Psi \circ \Phi$ über x die Identität ist, und nutzen Sie, dass die invertierbaren Matrizen offen sind.

(b) Folgern Sie, dass das Bündel E_P lokal-trivial ist.

Aufgabe 2. Sei X ein kompakter Raum und $\pi\colon F \to X$ ein d-dimensionales komplexes lokal-triviales Vektorbündel. Wir wählen

- offene Mengen $U_1, \ldots, U_n$, die X überdecken und auf denen F trivial ist,
- Trivialisierungen $\phi_k\colon \pi^{-1}(U_k) \xrightarrow{\cong} U_k \times \mathbb{C}^d$ für $k = 1, \ldots, n$,
- eine der Überdeckung untergeordnete Partition $(\chi_k)_k$ der 1, also $\mathrm{supp}\chi_k \subseteq U_k$ und $\sum_k \chi_k = 1$.

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe der $(\phi_k)_k$ und $(\chi_k)_k$ eine injektive Bündel-Abbildung

$$\Phi\colon F \to X \times \mathbb{C}^{dn}.$$

(Es ist vielleicht hilfreich, mit $\tilde{\phi}_k$ und $\tilde{\Phi}$ die jeweilige Verknüpfung mit der Projektion auf $\mathbb{C}^d$ bzw. $\mathbb{C}^{dn}$ zu bezeichnen.)

(b) Konstruieren Sie mit Hilfe geeigneter Funktionen $(\tilde{\chi}_k)_k$ eine Bündel-Abbildung

$$\Psi\colon X \times \mathbb{C}^{dn} \to F$$

mit $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_F$ (ohne Injektivität in (a) zu benutzen).

(c) Finden Sie eine stetige Abbildung $P\colon X \to M_{dn}(\mathbb{C})$ mit $P(x)^2 = P(x)$ für alle $x \in X$ und $\Phi(F) = E_P$, wobei E_P wie in Aufgabe 1 definiert sei. Können Sie mit Hilfe einer hermiteschen Struktur auf X die Zusatzeigenschaft $P(x)^* = P(x)$ erzielen? (Dann können wir P als Projektion in $M_{dn}(C(X))$ auffassen).

(d) Folgern Sie aus (c) und Aufgabe 1, dass es ein lokal-triviales Vektorbündel G auf X mit $F \oplus G \cong X \times \mathbb{C}^{dn}$ gibt. (Jedes lokal-triviale Vektorbündel ist also direkter Summand eines trivialen Vektorbündels, wobei das Komplement-Bündel lokal-trivial ist.)

(e*) Folgern Sie, dass der Raum $\Gamma(E)$ der stetigen Schnitte von $\pi\colon F \to X$ als rechter $C(X)$-Modul bezüglich der punktweisen Multiplikation projektiv und endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3. Sei A eine C^*-Algebra und $e \in A$ idempotent, also $e^2 = e$. Zeigen Sie:

(a) Das Element $h := 1 + (e - e^*)(e^* - e)$ ist invertierbar.

(b) $eh = ee^*e = he$ und $e^*h = e^*ee^* = he^*$.

(c) $p := ee^*h^{-1}$ ist eine Projektion und $ep = p$ sowie $pe = e$.

Aufgabe 4. Sei A eine unitale C^*-Algebra.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Idempotente $q \in M_n(A)$ das Bild qA^n ein endlich erzeugter, projektiver rechter A-Modul ist.

Sei nun P ein projektiver rechter A-Modul mit endlich vielen Erzeugern $e_1, \dots, e_n$.

(b) Verwenden Sie die universelle Eigenschaft von P, um zu zeigen, dass P ein direkter Summand von A^n ist. (Die universelle Eigenschaft war, dass für jede Surjektion $\pi\colon M \to N$ rechter A-Moduln und jedes $\phi\colon P \to N$ ein $\psi\colon P \to M$ mit $\pi \circ \psi = \phi$ existiert.)

(c) Geben Sie einen Isomorphismus $M_n(A) \to \mathrm{End}(A^n)$ an, wobei die rechte Seite die Endomorphismen von A^n als rechter A-Modul bezeichne.

(d) Finden Sie ein Idempotentes $p \in M_n(A)$ mit $pA^n \cong P$.

(e) Finden Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 eine Projektion $p \in M_n(A)$ mit $pA^n \cong P$.