Übung zur K-Theorie
Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots$ eine Folge lokal-kompakter Hausdorff-Räume, $X = \bigcup_n X_n$ der induktive Limes und $K \subseteq X$ kompakt (zur Erinnerung: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, falls $U \cap X_n$ offen ist für jedes n). Zeigen Sie, dass dann $K \subseteq X_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Man kann sich auf den Fall $\mathrm{int}X_n = \emptyset$ (Inneres ist leer) und $K = X$ einschränken und dann ein Baire-Kategorien-Argument für kompakte statt vollständige Räume verwenden).

Aufgabe 2. (Das Folgende wurde wohl in der Vorlesung kurz besprochen, soll aber etwas detaillierter durchgegangen werden.) Sei A eine unitale C^*-Algebra, seien p, q Projektionen in A mit $\|p - q\| < 1/2$ und sei $z := pq + (1-p)(1-q)$. Zeigen Sie:

(a) $pz = pq = zq$;

(b) $\|z - 1\| \leq 2\|p - q\| < 1$;

(c) es gibt ein Unitäres $u \in A$ mit $z = u|z|$;

(d) $p = uqu^*$.

Aufgabe 3. Sei $p\colon [0,1] \to A$ ein stetiger Pfad von Projektionen in A; dann können wir p auch als Projektion in $C([0,1], A)$ auffassen. Zeigen Sie: Es gibt einen stetigen Pfad von Unitären $u\colon [0,1] \to A$, d.h. ein Element $u \in C([0,1], A)$ mit $p(t) = u(t)p(0)u(t)^*$ für alle $t \in [0,1]$. Betrachten Sie dafür zunächst den Spezialfall, dass $\|p(0) - p(t)\| < 1/2$ für alle $t \in [0,1]$, und verwenden Sie Aufgabe 2 mit $p(0)$ und $p(t)$.

Aufgabe 4. Bezeichne $D \subseteq \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe, $T = \partial D$ deren Rand und $z \in C(T)$ die Identität (nicht die Eins).

(a) Gibt es einen einen Lift von z entlang der Einschränkungsabbildung $C(D) \to C(T)$?

(b) Zerfällt die kurze exakte Sequenz $0 \to C_0(\mathrm{int}D) \to C(D) \to C(T) \to 0$?

(c) Liegt z in der Zusammenhangskomponente der 1 in $U(C(T))$?

Aufgabe 5. (a) Sei A eine C^*-Algebra und $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ ein Spurzustand, also ein Zustand mit $\tau(ab) = \tau(ba)$ für alle $a, b \in A$. Wie kann man aus τ eine Abbildung $K_0(A) \to \mathbb{C}$ konstruieren?

(b) Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Konstruieren Sie eine Abbildung $\dim\colon K_0(C(X)) \to C(X, \mathbb{Z})$. Ist diese Abbbildung surjektiv? Zusatzaufgabe (dazu evt. Hilfestellungen nötig): Wenn X total unzusammenhängend ist (eine Basis aus Mengen hat, die offen und abgeschlossen sind), so ist diese Abbildung injektiv.

Sei X ein zusammenziehbarer kompakter Hausdorff-Raum. Zeigen Sie, dass dann $K_0(C(X)) \cong \mathbb{Z}$ gilt.