Übung zur K-Theorie
Blatt 3

Aufgabe 1. (*Cuntz-Algebren*) Sei $n \geq 2$ und

$$\mathcal{O}_n = C^*\big(s_1, \dots, s_n | s_1^* s_1 = \dots = s_n^* s_n = 1 = \sum_i s_i s_i^*\big)$$

die zugehörige Cuntz-Algebra, also die universelle C^*-Algebra mit n Isometrien, deren Bildprojektionen paarweise orthogonal mit Summe 1 sind. Man kann zeigen, dass diese Algebra einfach ist in dem Sinne, dass sie keine nichttrivialen Quotienten besitzt.

(a) Finde eine Darstellung von $\mathcal{O}_n$ auf $l^2(\mathbb{N})$.

(b) Sei $\phi\colon \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ ein unitaler $*$-Endomorphismus. Zeige, dass es ein Unitäres $u \in \mathcal{O}_n$ gibt, das $\phi(s_i) = us_i$ für $i = 1, \dots, n$ erfüllt. (*Hinweis:* Wie kann man u aus den Bildern von $\phi(s_i)$ rekonstruieren?)

(c) Zeige, dass die Abbildung $\lambda\colon \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$, $x \mapsto \sum_j s_j x s_j^*$, ein unitaler $*$-Endomorphismus von $\mathcal{O}_n$ ist und $K_0(\lambda)(g) = ng$ für alle $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$ gilt.

(d) Finde ein Unitäres $u \in \mathcal{O}_n$, das $\lambda(s_i) = us_i$ für $i = 1, \dots, n$ erfüllt. Zeige, dass $u = u^*$ und dass u homotop zu 1 in $\mathcal{O}_n$ ist.

(e) Zeige, dass für jedes $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$ gilt, dass $(n-1)g = 0$, und folgere $K_0(\mathcal{O}_2) = 0$.

Übrigens wird $K_0(\mathcal{O}_n)$ von $[1]$ erzeugt und ist somit isomorph zu $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. (*Echt unendliche C^*-Algebren*) Sei A eine C^*-Algebra. Eine Projektion $p \in A$ mit $p \neq 0$ heißt *echt unendlich (properly infinite)*, wenn es zwei orthogonale Projektionen e, f in A mit $e, f \leq p$ und $e \sim p \sim f$ gibt. Man nennt A *echt unendlich*, falls A unital und 1_A echt unendlich ist.

(a) Finde Beispiele und Gegenbeispiele echt unendlicher C^*-Algebren.

Sei A nun echt unendlich.

(b) Zeige, dass A zwei Isometrien s_1, s_2 mit orthogonalen Bildprojektionen besitzt.

(c) Zeige, dass es in A eine Folge $(t_n)_n$ von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildprojektionen gibt.

(d) Zeige, dass für jedes n einen $*$-Homomorphismus $\mathcal{O}_n \to A$ gibt, der nicht Null ist.

(e) Konstruiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Isometrie $v_n \in M_n(A)$ mit $v_n v_n^* = \operatorname{diag}(f, 0, \ldots, 0)$ für eine Projektion $f \in A$.

(f) Schlussfolgere, dass für jede Projektion $p \in M_n(A)$ eine Projektion $q \in A$ existiert mit $p \sim q$ in $M_\infty(A)$.

(g) Seien $p, q \in A$ Projektionen und $r = t_1 p t_1^* + t_2(1-q)t_2^* + t_3(1 - t_1 t_1^* - t_2 t_2^*)t_3^*$. Zeige, dass r eine Projektion ist und $[r] = [p] - [q]$ in $K_0(A)$ gilt.

(h) Schlussfolgere, dass $K_0(A) = \{[p] : p \in A \text{ Projektion}\}$ gilt.

Aufgabe 3. Sei A eine C^*-Algebra, $\mathcal{P}_m(A)$ die Projektionen in $M_m(A)$ und $\mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_m \mathcal{P}_m(A)$. Für $p \in \mathcal{P}_m(A)$, $q \in \mathcal{P}_n(A)$ definieren wir

$$p \precsim q \quad :\Leftrightarrow \quad \exists q_0 \in \mathcal{P}_n(A) : p \sim q_0 \leq q.$$

(a) Zeige, dass $p \precsim q$ genau dann, wenn $q \sim p \oplus p_0$ für eine Projektion $p_0 \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

(b) Zeige, dass $\precsim$ transitiv und in geeigneter Weise verträglich mit der Addition ist.

(c) Zeige, dass eine Projektion $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ mit $p \neq 0$ genau dann echt unendlich ist, wenn $p \oplus p \precsim p$.

(d) Seien p, q Projektionen in A, gelte $p \precsim q \precsim p$ und sei p rein unendlich. Zeige, dass dann auch q rein unendlich ist.

(e) Finde Projektionen $p, q \in \mathcal{O}_n$ für $n > 2$ mit $p \precsim q \precsim p$ und $p \not\sim q$. Verwende dazu (ohne Beweis) die Bemerkung zu $K_0(\mathcal{O}_n)$ am Ende der Aufgabe 1.

Aufgabe 4. (*Volle Projektionen*) Sei A eine unitale C^*-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt *voll*, falls $AaA \subseteq A$ linear dicht ist.

(a) Zeige, dass $a \in A$ genau dann voll ist, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_i, y_i \in A$ mit $1_A = \sum_{i=1}^n x_i a y_i$ gibt. (*Hinweis:* Ist AaA linear dicht in A, so enthält es invertierbare Elemente.)

(b) Seien $a \in A^+$ und $x, y \in A$. Zeige, dass $xay + y^*ax^* \leq xax^* + y^*ay$. (*Hinweis:* Geschickt eine binomische Formel in A anwenden.)

(c) Sei $a \in A^+$, $a \geq 1_A$ und $q \in A$ eine Projektion. Zeige, dass dann $rar^* = q$ für ein $r \in A$.

(d) Schlussfolgere, dass für jedes volle Element $a \in A^+$ und jede Projektion $q \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in A$ mit $q = \sum_{i=1}^n x_i a x_i^*$ existieren.

(e) Seien $p, q \in A$ Projektionen und p voll. Zeige, dass dann $q \precsim p \oplus \cdots \oplus p = p^{\oplus n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(f) Sei $p \in A$ eine volle, echt unendliche Projektion. Zeige, dass dann A echt unendlich ist.

Aufgabe 5. (Volle, echt unendliche Projektionen) Sei A eine unitale C^*-Algebra. Wir nennen eine Projektion $p \in \mathcal{P}_n(A) \subseteq \mathcal{P}_\infty(A)$ voll, wenn p voll in $M_n(A)$ ist. Sei $e \in \mathcal{P}_\infty(A)$ voll und echt unendlich.

(a) Zeige, dass $q \precsim e$ für jedes $q \in \mathcal{P}_\infty(A)$. (*Hinweis:* Betrachte zunächst den Spezialfall $q = 1_n \in M_n(A)$.)

(b) Seien $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$ und $[p] = [q]$ in $K_0(A)$. Zeige, dass dann $p \oplus e \sim q \oplus e$.

(c) Sei auch $f \in \mathcal{P}_\infty(A)$ voll und echt unendlich. Zeige, dass aus $[e] = [f]$ in $K_0(A)$ folgt, dass $e \sim f$.