# Übung zur K-Theorie
## Blatt 4

**Aufgabe 1.** (*Volle Projektionen*) Sei $A$ eine unitale $C^*$-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt *voll*, falls $AaA \subseteq A$ linear dicht ist.

(a) Zeige, dass $a \in A$ genau dann voll ist, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_i, y_i \in A$ mit $1_A = \sum_{i=1}^n x_i a y_i$ gibt. (*Hinweis:* Ist $AaA$ linear dicht in $A$, so enthält es invertierbare Elemente.)

(b) Seien $a \in A^+$ und $x, y \in A$. Zeige, dass $xay + y^*ax^* \leq xax^* + y^*ay$. (*Hinweis:* Geschickt eine binomische Formel in $A$ anwenden.)

(c) Sei $a \in A^+$, $a \geq 1_A$ und $q \in A$ eine Projektion. Zeige, dass dann $rar^* = q$ für ein $r \in A$.

(d) Schlussfolgere, dass für jedes volle Element $a \in A^+$ und jede Projektion $q \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in A$ mit $q = \sum_{i=1}^n x_i a x_i^*$ existieren.

(e) Seien $p, q \in A$ Projektionen und $p$ voll. Zeige, dass dann $q \precsim p \oplus \cdots \oplus p = p^{\oplus n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 2.** (*Morita-Äquivalenz*) Starke Morita-Äquivalenz für $C^*$-Algebren ist eine sehr nützliche Äquivalenzrelation und kann auf verschiedene Arten definiert bzw. charakterisiert werden; eine übliche benutzt den Begriff von Hilbert-$C^*$-Moduln. Wir nennen zwei $C^*$-Algebren $A$ und $B$ stark Morita-äquivalent und schreiben $A \overset{M}{\sim} B$, falls es eine $C^*$-Algebra $C$ (die "Linking-Algebra") mit zwei Projektionen $p, q$ in der Multiplikator-Algebra $M(C)$ gibt, die folgende Eigenschaften haben:

$$p + q = 1, \qquad pCp \cong A, \qquad qCq \cong B, \qquad [CpC] = C = [CqC],$$

woebi $[X]$ die abgeschlossene lineare Hülle einer Menge $X$ bezeichne. Die Transitivität dieser Relation erfordert ein bisschen Arbeit; das kommt dann vielleicht auf das nächste Blatt.

(a) Zeige: $A \overset{M}{\sim} A \otimes \mathcal{K}(H)$ für jede $C^*$-Algebra $A$ und jeden Hilbertraum $H$. Insbesondere gilt $A \overset{M}{\sim} B$, falls $A \otimes \mathcal{K}(H) \cong B \otimes \mathcal{K}(H)$. (Die Umkehrung gilt zumindest, wenn die $C^*$-Algebren auch separabel sind.)

Sei $A \overset{M}{\sim} B$ und seien $C, p, q$ wie oben.

(b) Zeige, dass für jede Projektion $e \in C$ ein $n$ und eine Projektion $f \in M_n(A)$ mit $e \sim f$ existiert. (*Hinweis:* Verwende Ideen aus Aufgabe 1 und benutze, dass die Algebra $eCe$ unital ist.)

(c) Zeige, dass die Abbildung $K_0(A) \cong K_0(pAp) \to K_0(C)$ surjektiv ist.

(d) Zeige, dass die Abbildung aus (c) auch injektiv ist.

(e) Schlussfolgere: $A \overset{M}{\sim} B$ impliziert $K_0(A) \cong K_0(B)$.

**Aufgabe 3.** Im Beweis der Bott-Periodizität mit Hilfe der Töplitz-Algebra $\mathcal{T}$ betrachtet man an einer Stelle die Summe $\mathcal{T} \otimes 1 + \mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ und verwendet, dass diese abgeschlossen ist. Zeige allgemein, dass für jede $C^*$-Algebra $A$ mit einer $C^*$-Unteralgebra $B$ und einem abgeschlossenen $*$-Ideal $I$ die Summe $B + I$ abgeschlossen in $A$ ist. Verwende dazu den $*$-Homomorphismus $B/(B \cap I) \to A/I$.

**Aufgabe 4.** (*Teil des klassischen Beweises der Bott-Periodizität*) Sei $A$ eine unitale $C^*$-Algebra. Wir definieren $\beta\colon K_0(A) \to K_1(S(A))$, wobei $S(A)$ die Einhängung bezeichne, durch $\beta([p]) = [u_p]$ mit $u_p = pz + (1_n - p)$ für $p \in M_n(A)$, wobei $z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben sei durch $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$. Die folgenden Schritte werden zeigen, dass $\beta$ surjektiv ist (Injektivität ist dann im Prinzip nur Surjektivität für Homotopien). Die Idee ist, $K_1(S(A))$ durch Pfade in $\bigcup_n GL_n(A)$ (statt $\bigcup_n U_n(a)$) darzustellen und einen beliebigen gegebenen Pfad schrittweise durch einen "einfacheren" äquivalenten Pfad zu ersetzen, bis man bei etwas von der Form $u_p$ ankommt. Sei also $v\colon [0,1] \to GL_n(A)$ stetig mit $v(0) = v(1) = 1_n$. Zeige:

(a) Es gibt $a_{-l}, a_{-l+1}, \dots, a_{k-1}, a_k \in M_n(A)$ derart, dass $w := \sum_{j=-l}^{k} a_j z^j \in GL_n(S(A))$ und $w(0) = w(1) = 1_n$ sowie $[v] = [w]$. (Wir können uns also auf "Laurent-Pfade" $w$ beschränken).

(b) Es gilt $[z^l w] = [z^l 1_n] + [w]$ und insbesondere $[v] = [z^l w] - [z^l 1_n]$. (Wir können von uns also auf "polynomielle Pfade" beschränken.)

(c) Sei $l = 0$,

$$w'_s := \begin{pmatrix} 1 & -sz^{k-1}1_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ sa_k z & 1 \end{pmatrix} \in GL_{2n}(S(A))$$

und $w''_s := w'_s(w'_s(0))^{-1}$ für $s \in [0,1]$. Dann gilt $w''_s(0) = w''_s(1) = 1_{2n}$ für alle $s \in [0,1]$, $[w''_0] = [w]$ und $w''_1$ ist ein "polynomieller Pfad vom Grad kleiner gleich $k-1$ in $z$".

(d) Es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1 \in M_m(A)$ mit $[w] = [a_1 z + a_0]$ und $a_1 + a_0 = 1_m$.

Die weiteren Teilschritte (es sind nur noch wenige) folgen auf dem nächsten Blatt.