J. Cuntz und T. Timmermann SS 14

# Übung zur K-Theorie
## Blatt 5

**Aufgabe 1.** Wir setzen die Aufgabe 4 vom letzten Blatt fort. Sei also $A$ eine unitale $C^*$-Algebra. Wir sahen, dass jedes Element von $K_1(S(A))$ durch als Differenz von zwei invertierbaren Elementen der Form $a_0z + a_1$ mit $a_0, a_1 \in M_m(A)$ und $a_1 + a_0 = 1_m$ dargestellt werden kann, wobei $z$ in der Unitalisierung $\widetilde{S(A)} = C(\widetilde{(0,1)}; A)$ gegeben ist durch $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi it}$. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir nun $m = 1$ an (sonst können wir einfach zu $M_m(A)$ übergehen) und setzen

$$X := \{a \in A : az + 1 - a \text{ invertierbar in } \widetilde{S(A)}\}.$$

(a) Zeige: $a \in A$ liegt in $X$ genau dann, wenn das Spektrum von $\sigma(a)$ keinen Punkt von $\{1/(1-z) : z \in \mathbb{T}, z \neq 1\}$ enthält.

(b) Sei $a \in X$. Zeige mit Hilfe des holomorphen Funktionalkalküls, dass es eine stetige Abbildung $b \colon [0,1] \to X$ gibt mit $b(0) = a$ und $\sigma(b(1)) \subseteq \{0,1\}$, also $b(1) = b(1)^* = b(1)^2$.

(c) Sei $a \in X$. Zeige, dass es eine Projektion $p \in A$ mit $[az + (1-a)] = [pz + (1-p)] \in K_1(S(A))$ gibt.

Zusammen mit der Aufgabe 4 vom letzten Blatt erhalten wir somit die Surjektivität der Bott-Abbildung $\beta \colon K_0(A) \to K_1(S(A))$.

**Aufgabe 2.** Bestimme die 6-Term-Sequenzen der K-Theorie (d.h. die K-Gruppen und Homomorphismen) für folgende exakte Sequenzen:

(a) $C_0((0,1)) \hookrightarrow C([0,1]) \twoheadrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$;

(b) $A \hookrightarrow \tilde{A} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, wobei $\tilde{A}$ die Unitalisierung von $A$ bezeichne;

(c) $C_0((0,1)) \hookrightarrow C(\mathbb{T}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{T} = \partial D$ mit $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$;

(d) $C_0(\mathrm{int} D) \hookrightarrow C(D) \twoheadrightarrow C(\mathbb{T})$.

**Aufgabe 3.** Sei $A$ die universelle $C^*$-Algebra, die von zwei Projektionen $p, q$ erzeugt wird. Im letzten Semester sahen wir (Übungsblatt 1, Aufgabe 2), dass wir $A$ mit der $C^*$-Algebra

$$\{f \in C([0,1]; M_2(\mathbb{C})) : f(0), f(1) \text{ sind diagonal}\}$$

identifizieren können, wobei $p$ und $q$ den Funktionen

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} c^2(t) & c(t)s(t) \\ c(t)s(t) & s^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } c(t) = \cos(\pi t/2),\ s(t) = \sin(\pi t/2)$$

entsprechen. Wir wollen die K-Gruppen von $A$ bestimmen und betrachten dazu die kurze exakte Sequenz

$$C((0,1); M_2(\mathbb{C})) \hookrightarrow A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2,$$

wobei $\pi(f) = (f(0), f(1))$ für alle $f \in A$.

(a) Bestimme die Bilder von $[1_A]$, $[p]$ und $[q]$ in unter der Abbildung $\pi_*\colon K_0(A) \to K_0(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2$.

(b) Zeige, dass die Rand-Abbildung $K_0(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) \to K_1(C(0,1); M_2(\mathbb{C}))$ der zugehörigen 6-Term-Sequenz die Form

$$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \ni (a,b,c,d) \mapsto (a+b) - (c+d) \in \mathbb{Z}$$

hat.

(c) Zeige, dass $K_0(A)$ von $[1_A]$, $[p]$ und $[q]$ als abelsche Gruppe frei erzeugt wird und insbesondere isomorph zu $\mathbb{Z}^3$ ist und dass $K_1(A) = 0$.

**Aufgabe 4.** (a) Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz $I \hookrightarrow A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$, wobei $A, B$ unital sind. Sei $u \in M_n(B)$ unitär und bezeichne $\pi_n\colon M_n(A) \to M_n(B)$ die induzierte Surjektion. Zeige:

i) es gibt ein $a \in M_n(A)$ mit $\|a\| = 1$ und $\pi_n(a) = u$;

ii) $v := \begin{pmatrix} a & 0 \\ (1 - a^*a)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(A)$ ist eine partielle Isometrie;

iii) die Indexabbildung $\delta\colon K_1(B) \to K_0(I)$ schickt $[u]$ auf $[1_{2n} - v^*v] - [1_{2n} - vv^*]$.

(b) Wir betrachten die 6-Term-Sequenz zu der kurzen exakten Folge $C_0(\mathrm{int} D) \to C(D) \to C(\mathbb{T})$. Verwende (a), um explizit die Bilder von $[z^m] \in K_1(C(\mathbb{T}))$ für $m \in \mathbb{Z}$ unter der Randabbildung zu berechnen.

**Aufgabe 5.** Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $\iota_a\colon M_a(\mathbb{C}) \to M_{ab}(\mathbb{C})$ und $\iota_b\colon M_b(\mathbb{C}) \to M_{ab}(\mathbb{C})$ definiert durch $T \mapsto \mathrm{diag}(T, \ldots, T)$. Berechne die K-Gruppen der $C^*$-Algebra

$$\{f \in C([0,1]; M_{ab}(\mathbb{C})) : f(0) \in \iota_a(M_a(\mathbb{C})), f(1) \in \iota_b(M_b(\mathbb{C}))\}.$$