J. Cuntz und T. Timmermann SS 14

Übung zur K-Theorie
Blatt 6

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist der *Moore-Raum* X_n definiert als Quotient von $\mathbb{D}$ nach $\sim_n$, wobei $z_1 \sim_n z_2$ genau dann, wenn $z_1 = z_2$ oder wenn $|z_1| = |z_2|$ und $z_1^n = z_2^n$. Zeige: $K_0(C(X_n)) = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ und $K_1(C(X_n)) = 0$. Benutze dazu eine Abbildung zwischen kurzen exakten Sequenzen der Form

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0(\mathbb{R}^2) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & C(X_n) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook, "\phi"] & C(\mathbb{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0(\mathbb{R}^2) \arrow[r, hook] & C(\mathbb{D}) \arrow[r] & C(\mathbb{T}) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

und die Natürlichkeit der 6-Term-Sequenz in der K-Theorie. Hier ist

- ϕ induziert von der Quotientenabbildung $\mathbb{D} \to X_n$,
- ρ_n definiert durch $(\rho_n(f))(z) = f(z^n)$,
- π geeignet zu definieren.

Aufgabe 2. Bezeichne $\vee^n S^1$ den Raum, den man erhält, wenn man n Kopien von S^1 jeweils am Punkt $(1, 0)$ zusammenklebt. Berechne $K_0(C(\vee^n S^1))$ und $K_0(C(\vee^n S^1))$ mit Hilfe einer geeigneten exakten Sequenz $I \to C(\vee^n S^1) \to B$.

Aufgabe 3. Sei $\phi\colon A \to B$ ein $*$-Homomorphismus zwischen C^*-Algebren und

$$E_\phi = \{(f, a) \in C([0, 1], B) \oplus A : f(0) = 0, f(1) = \phi(a)\}$$

der zugehörige Abbildungskegel. Konstruiere eine exakte 6-Term-Sequenz der Form

$$\begin{tikzcd}
K_1(B) \arrow[r] & K_0(E_\phi) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[u] & K_1(E_\phi) \arrow[l] & K_0(B). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$