Übung zur K-Theorie
Blatt 7

Aufgabe 1. Sei A eine C^*-Algebra mit zwei Automorphismen α_0, α_1.

(a) Wann sollten α_0 und α_1 homotop genannt werden? Es gibt mindestens zwei äquivalente Definition; eine beinhaltet eine Wirkung α auf $C([0,1]; A)$.

(b) Konstruiere mit Hilfe der Pimsner-Voiculescu-Sequenzen für $A \rtimes_{\alpha_i} \mathbb{Z}$ und $C([0,1]; A) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ (und der Natürlichkeit der Pimsner-Voiculescu-Sequenz) für $i = 0, 1$ Isomorphismen zwischen $K_i(A \rtimes_{\alpha_0} \mathbb{Z})$ und $K_i(A \rtimes_{\alpha_1} \mathbb{Z})$.

Aufgabe 2. Es wirke $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ durch Translation (Verschiebung des Arguments). Berechne die K-Theorie von $C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Bezeichne $X = \mathbb{Z} \cup \{\infty, -\infty\}$ die natürliche Zwei-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{Z}$. Die Gruppe $\mathbb{Z}$ wirke auf X durch Translation, wobei ∞ und $-\infty$ fix bleiben. Berechne die K-Theorie von $C(X) \rtimes \mathbb{Z}$ mit Hilfe der Pimsner-Voiculescu-Sequenz oder mit Hilfe der exakten Sequenz $C_0(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z} \to C(X) \rtimes \mathbb{Z} \to (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. Zeige mit Hilfe der Index-Abbildung der 6-Term-Sequenz für die exakte Sequenz $0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{B}(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$, dass der Fredholm-Index $\operatorname{ind}(x) := \dim\ker(x) - \dim\operatorname{coker}(x)$ eines Fredholm-Operators $x \in \mathcal{B}(H)$

- homotopie-invariant ist,
- sich bei Addition von kompakten Operatoren $k \in \mathcal{K}(H)$ nicht ändert,
- genau dann verschwindet, wenn $x + k$ für ein $k \in \mathcal{K}(H)$ invertierbar ist,
- $\operatorname{ind}(xy) = \operatorname{ind}(x) + \operatorname{ind}(y)$ erfüllt.