Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

# Übung zur Analysis 3
## Blatt 1

Abgabe bis Do, 29.10., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-4 zur selbständigen Bearbeitung

**Aufgabe 1.** Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $[-\infty, \infty]$ und seien $(y_n)_n$ und $(z_n)_n$ definiert durch

$$y_n := \sup\{x_m : m \geq n\} \in [-\infty, \infty] \quad \text{und} \quad z_n := \inf\{x_m : m \geq n\} \in [-\infty, \infty].$$

(a) Prüfen Sie, ob die Folgen $(y_n)_n$ und $(z_n)_n$ monoton fallen oder wachsen, und folgern Sie, dass in $[-\infty, \infty]$ die Grenzwerte

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} z_n,$$

genannt der *Limes superior* beziehungsweise *Limes inferior* von $(x_n)_n$, existieren.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $r \in [-\infty, \infty]$ gilt:

i) $r > \limsup_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x_n \leq r$ für fast alle $n$,
ii) $r < \limsup_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x_n \geq r$ für unendlich viele $n$,
iii) $r > \liminf_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x_n \leq r$ für unendlich viele $n$,
iv) $r < \liminf_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x_n \geq r$ für fast alle $n$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_n$ genau dann konvergiert, wenn ihr Limes superior mit ihrem Limes inferior übereinstimmt. Was ist in dem Fall ihr Limes?

**Aufgabe 2.** Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum und seien $A, B \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A), \mu(B) < \infty$. Zeigen Sie:

(a) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;

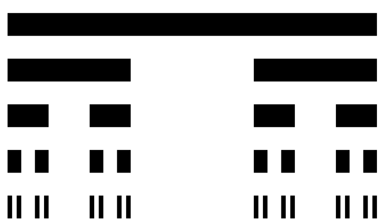
(b) $\mu(A \Delta B) = \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B)$, wobei $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die *symmetrische Differenz* von $A$ und $B$ bezeichnet.

**Aufgabe 3.** Bezeichne $\mu$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$, deren Punkte in $\mathbb{R}$ dicht sind.

(b) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine offene, dichte Teilmenge $U$ von $\mathbb{R}$ mit $\mu(U) < \epsilon$. (*Hinweis:* Setzen Sie $U := \bigcup_n U_n$ mit geeigneten Umgebungen $U_n$ von $x_n$.)

**Zusatzaufgabe 4.** Die *Cantor-Menge* $C \subset [0, 1]$ erhält man, indem man vom Intervall $[0, 1]$ das mittlere offene Drittel $(1/3, 2/3)$ entfernt, anschließend aus den beiden verbleibenden Intervallen $[0, 1/3]$ und $[2/3, 1]$ jeweils deren mittleren offenen Drittel entfernt und diesen Prozess unendlich fortsetzt. Folgendes Bild von Wikipedia veranschaulicht das Ausgangsintervall und die verbleibenden Intervalle nach 1 bis 4 Schritten:



Zur exakten Definition setzen wir

$$U_1 := (1/3, 2/3) \quad \text{und} \quad U_{n+1} := \left\{ \frac{x}{3}, \frac{x+2}{3} : x \in U_n \right\} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Dann wird im $n$-ten Schritt die Menge $U_n$ entfernt und die verbleibende Cantor-Menge ist

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Zeigen Sie: die Cantor-Menge ist

(a) kompakt;

(b) eine Nullmenge. (*Hinweis:* was ist $\mu(U_n)$?)

(c) überabzählbar. (*Hinweis:* Bezeichne $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen von Nullen und Einsen. Zeigen Sie, dass diese Menge überabzählbar ist und durch die Abbildung

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1], \quad A \mapsto \sum_n \frac{2x_n}{3^n},$$

injektiv in die Cantormenge abgebildet wird.)