# Übung zur Analysis 3
# Blatt 2

Abgabe bis Do, 5.11., 12 Uhr

Aufgaben 1 und 2 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 3-5 zur selbständigen Bearbeitung

**Aufgabe 1.** Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ eine wachsende Folge von messbaren Teilmengen von $X$ (d.h. $A_n \in \mathcal{B}$) und $A = \bigcup_n A_n$. Zeigen Sie, dass $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
(*Hinweis:* Schreiben Sie $A$ als disjunkte Vereinigung geeigneter Mengen.)

(b) Sei $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ eine fallende Folge von Teilmengen von $X$ und $B = \bigcap_n B_n$. Zeigen Sie: Falls $\mu(B_n) < \infty$ für ein $n$, so gilt $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

(c) Zeigen Sie, dass im Fall $\mu(B_n) = \infty$ für alle $n$ in (b) keine Aussage über $\mu(B)$ möglich ist.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{R} \cong \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Hinweis: es genügt, zu zeigen, dass $A_n := [-n, n] \times \{0\}$ eine Nullmenge ist, und hier hilft eine geeignete Überdeckung durch Würfel.

**Aufgabe 3.** Für $r \in (0, \infty)$ betrachten wir die Skalierungsabbildung

$$h_r \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ x \mapsto rx.$$

Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

(a) $\mu^*(h_r(S)) = r^d \mu^*(S)$. (*Hinweis:* Es genügt, "$\leq$" zu zeigen. Warum?)

(b) $S$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn $h_r(S)$ Lebesgue-messbar ist.

**Aufgabe 4.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ nicht leer. Zeigen Sie, dass die Abstandsfunktion

$$d_A \colon X \to [0, \infty), \quad x \mapsto \inf_{a\in A} d(x, a),$$

die Ungleichung

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ erfüllt und insbesondere stetig ist.

**Zusatzaufgabe 5.** Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und sei $f \colon U \to \mathbb{R}^{d+1}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Im Fall $d = 1$ ist für jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq U$ das Bild $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge. Nehmen Sie dazu eine Skizze zur Hilfe.

(b) Auch im allgemeinen Fall ist für jeden abgeschlossenen Würfel $Q \subseteq U$ das Bild $f(Q) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

(c) Das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge. Verwenden Sie dazu ohne Beweis, dass eine Folge abgeschlossener Würfel $Q_n \subseteq U$ mit $\bigcup_n Q_n = U$ existiert.