Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 3
Blatt 3

Abgabe bis Do, 12.11., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. (a) Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum und $A \subseteq X$ messbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{B}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf A und $\mu_A := \mu|_{\mathcal{B}_A}$ ein Maß auf $\mathcal{B}_A$ ist.

(b) Sei W ein Würfel in $\mathbb{R}^d$. Man zeige, dass $\partial W := \bar{W} - \mathring{W}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Nun seien die Würfel W_n, $n \in \mathbb{N}$, fast-disjunkt. Man zeige, dass $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} W_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(W_n)$ gilt. (*Hinweis:* Erst die endlichen Summen betrachten, und dann Aufgabe 1 von Blatt 2 benutzen.)

Aufgabe 2. Sei $d \in \mathbb{N}$. Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ definieren wir

$$\nu(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sharp I_N(A) \quad \text{mit } I_N(A) := \left\{x \in \mathbb{Z}^d : \frac{x}{N} \in A\right\},$$

wobei $\sharp I_N(A)$ die Anzahl der Elemente in $I_N(A)$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Ist $d = 1$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, so stimmt $\nu(I)$ mit dem Inhalt $|I|$ überein. Genauer gilt in dem Fall für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sharp I_N((a, b)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sharp I_N([a, b]) = b - a.$$

(b) Ist $d \in \mathbb{N}$ beliebig und $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader, so stimmt $\nu(Q)$ mit dem Inhalt $|Q|$ überein.

Aufgabe 3. (a) Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ zwei Folgen in $[-\infty, \infty]$. Zeigen Sie, dass dann

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n,$$

und zeigen Sie an einem Beispiel, dass die linke und die rechte Seite verschieden sein können.

(b) Zeigen Sie, dass das die in Aufgabe 2 definierte Abbildung $\nu \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ endlich subadditiv ist, also für alle $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt, dass

$$\nu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \le \nu(A_1) + \cdots + \nu(A_n),$$

und schlussfolgern Sie folgenden Satz der Vorlesung: Sind $Q, Q_1, \ldots, Q_n \subseteq \mathbb{R}^d$ Quader mit $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^n Q_i$, so gilt $|Q| \le \sum_{i=1}^n |Q_i|$.

Aufgabe 4. Sei $f \colon \mathbb{N} \to [0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m f(n) \in [0, \infty]$.
(*Zur Erinnerung:* Die linke Seite ist definiert als Supremum der Summen $\sum_{n\in F} f(n)$ für alle endlichen Teilmengen $F \subseteq \mathbb{N}$. *Hinweis:* Zeigen Sie zwei Ungleichungen.)

(b) Für jede bijektive Abbildung $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} f(\pi(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

(c) Nun sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und es sei $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergent. Sei π wie in Aufgabenteil b. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f(\pi(n))$ ebenfalls absolut konvergiert und dass $\sum_{n=1}^{\infty} f(\pi(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ gilt.
(*Hinweis:* Schreiben Sie $f(n) = f_+(n) - f_-(n)$ mit $f_+(n) = \max\{0, f(n)\}$.
Bemerkung: Der berühmte Riemannsche Umordnungssatz besagt, dass diese Schlussfolgerung für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen stets falsch ist.)

Zusatzaufgabe 5. Sei $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ definiert wie in Aufgabe 2 und μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(a) Für jede endliche Menge disjunkter Würfel $W_1, \dots, W_n \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\nu(W_1 \cup \cdots \cup W_n) = \nu(W_1) + \cdots + \nu(W_n).$$

(b) Für jede beschränkte offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt $\mu(U) \leq \nu(U)$.

(c) Es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $A \subseteq [0,1]^d$ mit $\nu(A) = 1$.