Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 3
Blatt 5

Abgabe bis Do, 26.11., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. (a) Bezeichne μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Beppo-Levi, dass

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

indem Sie die Partialsummen als Integrale geeigneter Hilfsfunktionen interpretieren.

(b) Sei $(X,\mathcal{B},\mu)$ ein Maßraum, $N \subseteq X$ eine Nullmenge und $f,g\colon X \to [0,\infty]$ messbar mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Aufgabe 2. Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig. Zeigen Sie:

(a) Sind $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1}) \le \int_{[a,b]} f d\mu \le \sum_{k=1}^{n} \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1}),$$

wobei das Integralzeichen das Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes bezeichne (und nicht das Riemann-integral aus Analysis I).

(b) Es gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{[a,b]} f\, d\mu,$$

wobei die linke Seite das Riemann-Integral und die rechte Seite das Lebesgue-Integral bezeichne.

Aufgabe 3. Sei $(X,\mathcal{B},\mu)$ ein Maßraum.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Folge messbarer Funktionen $f_n\colon X \to [0,\infty]$ gilt:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

(b) Sei $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass dann durch

$$\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{B}$$

ein Maß μ_f auf X definiert wird. (*Hinweis:* Der Knackpunkt ist die σ-Additivität.)

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum, $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar und $g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$g(t) := \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist f eine Stufenfunktion, so ist auch g eine Stufenfunktion und dann gilt

$$\int_X f \, d\mu = \int_{[0,\infty)} g \, d\lambda, \tag{1}$$

wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichne.

(b) Ist $(f_n)_n$ eine Folge von Stufenfunktionen mit $f_n \nearrow f$, so gilt für die entsprechend gebildeten Funktion g_n auch $g_n \nearrow g$.

(c) Die Gleichung (1) gilt für jede messbare Funktion $f\colon X \to [0, \infty]$.

Zusatzaufgabe 5. Bezeichne $C \subseteq [0, 1]$ die Cantor-Menge, $U := [0, 1] \setminus C$ deren Komplement und $f_C\colon [0, 1] \to [0, 1]$ die Cantor-Volterra-Funktion wie in Aufgabe 5 von Blatt 4. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $g\colon [0, 1] \to [0, 2]$, definiert durch $g(t) := t + f_C(t)$, ist ein *Homöomorphismus*, was nach Definition bedeutet, dass g stetig und bijektiv ist sowie dass die Umkehrfunktion $g^{-1} : [0, 2] \to [0, 1]$ ebenfalls stetig ist.

(b) Die Bilder $g(C)$ und $g(U)$ sind messbar und haben jeweils Maß 1.

(c) Die Cantor-Menge C enthält eine Nullmenge T, deren Bild unter dem Homöomorphismus g nicht messbar ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie Korollar 34 des Skriptes.)