Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 3
Blatt 6

Abgabe bis Do, 03.12., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Die *Fourier-Transformierte* $\hat{f}$ ist dann definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

Sei ferner $xf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, wobei xf die Funktion $x \mapsto xf(x)$ bezeichne. Zeigen Sie, dass dann $\hat{f}$ stetig differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -i\widehat{(xf)}(\xi).$$

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar und $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Die Fourier-Transformierte von f' ist gegeben durch $\widehat{(f')}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Partielle Integration und Satz über dominierte Konvergenz.)

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (Y, d) ein metrischer Raum sowie $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) für jedes $x \in X$ ist die Funktion $f(x, -)\colon y \mapsto f(x, y)$ auf Y stetig;

(ii) es gibt eine integrierbare Funktion g auf X mit $g \geq |f(-, y)|$ für alle $y \in Y$; insbesondere ist also für jedes $y \in Y$ die Funktion $f(-, y)\colon x \mapsto f(x, y)$ integrierbar.

Nach Vorlesung ist dann die Funktion $F\colon Y \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$, stetig.

(a) Welchen Satz der Vorlesung erhält man im Fall $Y = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ (mit der üblichen Metrik)?

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes der Vorlesung folgenden aus der Analysis 2 bekannten Satz: Ist $(g_n)_n$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$, so ist auch deren Grenzfunktion g stetig.

(*Hinweis:* Setzen Sie $X = \mathbb{N}$ und verwenden Sie eine Teilfolge $(g_{n_k})_k$ mit $\|g_{n_{k+1}} - g_{n_k}\| < 2^{-k}$.)

Aufgabe 4. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ integrierbar. Zeigen Sie: Für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_A f\, d\mu \right| < \epsilon.$$

(*Hinweis:* Sie können sich auf den Fall $f \geq 0$ einschränken. Zeigen Sie dann die Aussage zuerst für Stufenfunktionen und dann per Approximation für f.)

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann die Funktion F, definiert durch

$$F(t) := \int_{[0,t]} f\, d\mu \text{ für } t \geq 0 \quad \text{und} \quad F(t) := -\int_{[t,0]} f\, d\mu \text{ für } t < 0$$

gleichmäßig stetig ist.

Zusatzaufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0 \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Schränken Sie sich dazu auf den Fall $f \geq 0$ ein und betrachten Sie die Werte

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1)} f(x+n)\, d\mu(x) \quad \text{und} \quad \int_{[0,1)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\, d\mu(x).$$

Damn muss aber auch der letzte Integrand, also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n),$$

für μ-fast alle $x \in [0,1)$ endlich sein. Daraus folgt, dass $(f(x+n))_n$ für μ-fast alle $x \in [0,1)$ eine Nullfolge ist. Analog sieht man, dass $(f(x-n))_n$ für μ-fast alle $x \in [0,1)$ eine Nullfolge ist. Damit folgt die Behauptung.