Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 3
Blatt 7

Abgabe bis Do, 10.12., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ messbar. Dann kann man zeigen, dass die Menge

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < f(x)\}.$$

Lebesgue-messbar ist. In Aufgabe 4 von Blatt 5 wurde gezeigt, dass auch die durch

$$g(y) := \mu_1(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\}) \quad \text{für } y \in [0,\infty)$$

definierte Funktion g messbar ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \mu_2(A) = \int_{[0,\infty)} g(y)\,dy,$$

wobei μ_1 und μ_2 das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

Aufgabe 2. Sei $s > 1$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_k(x) := \mathrm{e}^{-kx} x^{s-1},$$

Lebesgue-integrierbar auf $[0,\infty)$ mit

$$\int_0^\infty f_k(x)\,dx = \frac{\Gamma(s)}{k^s}.$$

(*Hinweis:* Substituieren Sie geeignet und betrachten Sie die Integrale von f_k über Intervalle der Form $(1/n, n)$ und verwenden Sie Beppo-Levi.)

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s),$$

wobei Γ die Gamma-Funktion und $\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ die *Zeta-Reihe* zu s ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie die geometrische Reihe und (a).)

Aufgabe 3. (a) Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, also $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann für alle gilt:

$$\mathscr{L}^q(X) \subseteq \mathscr{L}^p(X), \qquad \text{falls } 1 \leq p < q \leq \infty.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie für $f \in \mathscr{L}^q(X)$ die Menge aller x mit $|f(x)| \leq 1$ und die Menge aller x mit $|f(x)| > 1$ getrennt. Achten Sie auf den Fall $q = \infty$.)

(b) Zeigen Sie, dass für das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ gilt:

$$\mathscr{L}^p(\mathbb{N}) \subseteq \mathscr{L}^q(\mathbb{N}), \quad \text{falls } 1 \leq p < q \leq \infty.$$

(c) (Zusatzaufgabe) Prüfen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ und $p \in (1, \infty]$ die Funktion

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto |\ln t|^s,$$

in $\mathscr{L}^p((0,1))$ liegt.

Aufgabe 4. Sei $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx\, dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dy\, dx,$$

und folgern Sie, dass f nicht integrierbar ist.

Zusatzaufgabe 5. Dankenswerterweise wurden wir von Ihnen darauf hingewiesen, dass das Lied

"In der Weihnachtsbäckerei"

eigentlich auf Henri Lebesgue zurückgeht und der Originaltext wie folgt lautet:

In der Weihnachts-Lebesguerei
Gibt's so maches Integral
Zwischen Mehl und Maß
hat der Henri Spaß
Auf der Borel σ-Algebra
In der Weihnachts-Lebesguerei
In der Weihnachts-Lebesguerei

Dazu von uns folgende Aufgabe: *Modellieren Sie mathematisch folgende Kurzgeschichte:*

Der kleine Henri stand mit roten Ohren am großen Küchentisch und knabberte an seinen Fingernägeln. Als ordentlicher Junge hatte er seinen Plätzchenteig als Einheitsquadrat ausgerollt, doch nun fehlte ihm eine Systematik für das Ausstechen der Plätzchen. Teig übrig lassen, Reste erneut zusammenkneten und wieder ausrollen, Übrigbleibsel einfach auffuttern — all das wäre einer intellektuellen Kapitulation vor $[0,1]^2$ gleichgekommen. Nach langem Grübeln sah er nur noch einen Ausweg und tat, was ein Junge manchmal tun muss. Er nahm das große Fleischermesser und teilte mit 4 kurzentschlossenen Hieben das Einheitsquadrat in 9 gleiche Untequadrate. Vorsichtig löste er das mittlere heraus und legte es auf das Backblech. Nun wiederholte er das Verfahren mit jedem der übrig gebliebenen 8 Quadrate, konnte jedoch dank der gewonnen Übung alle zusammen in der Hälfte der Zeit bewältigen. Und so fuhr er fort. Nur der Konvergenz der geometrischen Reihe war es zu verdanken, dass seiner Mutter der Anblick des mit dem Fleischermesser immer schneller auf den Küchentisch einhiebenden Henri erspart blieb, als sie am späten Abend heimkam. Statt dessen hatte er bereits wieder verschnauft, aufgeräumt und das Maß der Restmenge des Teiges berechnet. Und siehe, diese war **0**.