# Übung zur Analysis 3
# Blatt 8

Abgabe bis Do, 17.12., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

**Aufgabe 1.** Für die Integration im $\mathbb{R}^3$ ist manchmal die Polarkoordinatentransformation $Q\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)\to\mathbb{R}^3$ hilfreich, die definiert ist durch

$$Q(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

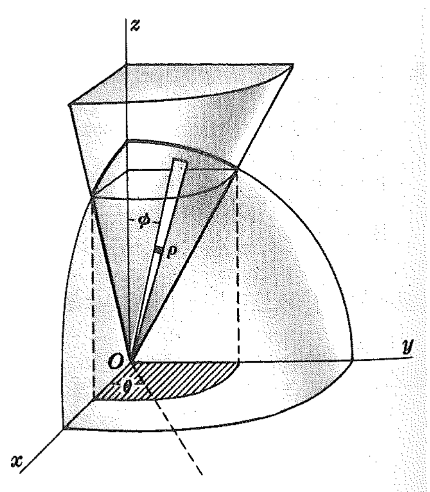
(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $JQ = (\partial_j Q_i)_{i,j}$ von $Q$.

(b) Zeigen Sie, dass deren Determinante gegeben ist durch $\det JQ(r,\theta,\phi) = r^2\sin\phi$.

(c) Zeigen Sie, dass $Q$ injektiv ist, und dass das Komplement des Bildes von $Q$ eine Nullmenge ist.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Transformation das Volumen der Einheitskugel.

**Aufgabe 2.** (a) Wir betrachten den Körper $K$, der von einem Kegel vom Winkel $60°$ durch die Kugel vom Radius $r = 2$ abgeschnitten wird, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist, also $K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3(x^2+y^2)\le z^2,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$. Das folgende Bild zeigt das *Viertel* von $K$, das im Oktanten $x\ge 0, y\ge 0$ liegt:



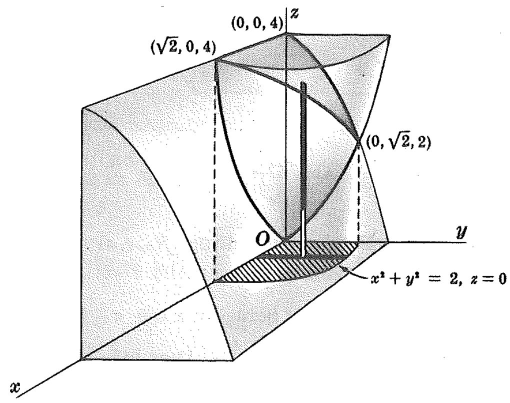

Zeigen Sie mit Hilfe der Polarkoordinatentransformation aus Aufgabe 1, dass das Volumen und die $z$-Koordinate des Schwerpunktes von $K$, also

$$V = \int_K d\mu(x,y,z) \quad \text{und} \quad z_S = \frac{1}{V}\int_K z\,d\mu(x,y,z),$$

gegeben sind durch $V = \frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ und $z_S = \frac{3(2+\sqrt{3})}{8}$.

(b) Bezeichne $D$ den Körper, der von dem Paraboloid $z = 2x^2+y^2$ und der Fläche $z = 4-y^2$ eingeschlossen wird, und sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ integrierbar. Bestimmen Sie Integrationsgrenzen $x_0, x_1,\ y_0(x), y_1(x),\ z_0(x,y),\ z_1(x,y)$ mit

$$\int_D f(x,y,z)\,d\mu(x,y,z) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0(x)}^{y_1(x)}\int_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$




**Aufgabe 3.** Seien $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass die *Faltung* $f * g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy,$$

integrierbar ist und $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$ erfüllt. (*Hinweis:* Verwenden Sie erst den Satz von Tonelli und dann den von Fubini für die Funktion $(x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$. Ignorieren Sie die Frage, ob diese Funktion messbar ist. Sie ist es, nach Satz 3.15 aus dem Skript (Version vom 7.12.))

(b) Sei zusätzlich $g$ stetig differenzierbar mit $g' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann auch $f * g$ stetig differenzierbar ist mit $(f * g)' = f * (g')$.

**Aufgabe 4.** Wir betrachten die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$, und deren Fourier-Transformierte

$$g(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi} d(x).$$

Zeigen Sie, dass $\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, d.h. $f$ ist ihre eigene Fouriertransformierte. Hinweis: differenzieren Sie $e^{\frac{\xi^2}{2}}\hat{f}(\xi)$, beachten Sie $f'(x) + xf(x) = 0$ und nutzen Sie Aufgaben 1,2 von Blatt 6 sowie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

**Zusatzaufgabe 5.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und es gelte $f, f', f'' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie die *Fourierumkehrformel*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi$$

in folgenden Schritten

(a) Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ ist eine $L^1$-Funktion. Zeigen Sie dafür, dass $|\xi^2 f(\xi)| \leq \|f''\|_1$ gilt.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-t^2\xi^2/2}e^{i\xi x} d\xi$. (Warum?)

(c) $\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-t^2\xi^2/2}e^{i\xi x} d\xi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2} f(x+tz)dx$: Fubini, Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Aufgabe 4.

(d) Der Grenzwert ist $f(x)$.