Übung zur Analysis 3
Blatt 9

Abgabe bis Do, 07.01., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. Sei $R > r > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Torus

$$T := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = r^2\right\}$$

(a) mit Hilfe der Parametrisierung

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} t \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + t\cos\theta)\cos\phi \\ (R + t\cos\theta)\sin\phi \\ t\sin\theta \end{pmatrix};$$

(b) mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips durch Integration des Flächeninhaltes von

$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in T\}$$

für z von $-r$ bis r.

Aufgabe 2. Es sei

$$D_n(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} \quad \text{und} \quad F_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$$

der $n$te Dirichlet-Kern bzw. der $n$te Fejer-Kern. Zeigen Sie:

(a) D_n und F_n sind 2π-periodische C^∞-Funktionen mit

$$\int_0^{2\pi} D_n(t)dt = \int_0^{2\pi} F_n(t)dt = 1.$$

(b) Es gilt

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{und} \quad F_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \frac{(\sin\frac{nt}{2})^2}{(\sin\frac{t}{2})^2}$$

sowie $F_n \geq 0$. (*Hinweis:* Die zweite Formel folgt aus der ersten mit Induktion.)

(c) Für jedes $\delta > 0$ konvergiert die Funktionenfolge F_n auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig gegen 0. Was ist $F_n(0)$?

Aufgabe 3. Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ und $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ ist beliebig oft stetig differenzierbar (siehe Analysis I, Übungsblatt 11, Aufgabe 4). Seien nun $a_0 < a_1 < b_1 < b_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Konstruieren Sie C^∞-Funktionen h und k, so dass

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a_0, \\ 0, & x \geq b_0, \end{cases} \qquad \text{sowie} \qquad k(x) = \begin{cases} 1, & a_1 \leq x \leq b_1, \\ 0, & x \leq a_0 \text{ oder } x \geq b_0. \end{cases}$$

(b) Konstruieren Sie eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $\phi\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ mit kompaktem Träger und $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx = 1$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für jedes $p \in [1,\infty)$ und jede Funktion $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \to \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d), \quad a \mapsto f \circ t_a,$$

stetig ist, wobei $t_a\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die Translation $x \mapsto x + a$ bezeichne.
(*Hinweis:* Erst $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ annehmen, dann den Approximationssatz verwenden.)

Aufgabe 5. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *schnell fallend*, falls sie beliebig oft differenzierbar ist und für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $x \mapsto x^k f^{(l)}(x)$ beschränkt ist. Sehr nützlich beim Studium der Fourier-Transformation ist der *Schwartz-Raum*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f \text{ ist schnell fallend}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $p \in [1,\infty)$ ist $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ enthalten in $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

(b) Definieren wir für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen Df, Pf durch $(Df)(x) := if'(x)$ und $(Pf)(x) := xf(x)$, so gilt für jedes $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ erstens $Df, Pf \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und zweitens $\widehat{Df} = -P\hat{f}$ sowie $\widehat{Pf} = D\hat{f}$.

(c) Die Fourier-Transformation bildet $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ bijektiv auf sich selbst ab.
(*Hinweis:* Aufgabe 5 von Blatt 8.)

(d) Es gilt die *Plancherel-Formel* $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.