Übung zur Analysis 3
Blatt 10

Abgabe bis Do, 14.01., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. Bezeichne $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $\dot{D}^2$) die (offene) Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie mit folgende Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_{D^2} (x+iy)^k (x-iy)^l d\mu(x,y), \qquad \text{(b)} \quad \int_{\dot{D}^2} \frac{d\mu(x,y)}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}.$$

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der Funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \quad \text{und} \quad g(x) = \chi_{[-1,1]}.$$

(b) Berechnen Sie Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_n$ der 2π-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in [-\pi, \pi)$. Welche Reihe für π^2 ergibt sich aus der Parsevalschen Gleichung für f?

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ ist stetig.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ und bezeichnet $t_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Translation $x \mapsto x + a$, so gilt

$$\widehat{(f \circ t_a)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ia\xi} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

(c) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $a \in (-\delta, \delta)$ und $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\hat{f}(\xi)(1 - \mathrm{e}^{i\xi a})| < \epsilon.$$

(*Hinweis:* (a) und Aufgabe 4 von Blatt 9.)

(d) Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| > \frac{\pi}{2\delta}$ gilt $|\hat{f}(\xi)| < \epsilon$.

(*Bemerkung:* Insbesondere gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $R > 0$ mit $|\hat{f}(\xi)| < \epsilon$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| > R$, d.h. $\hat{f}$ verschwindet im Unendlichen, also $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.)

Aufgabe 4. (a) Sei $\phi\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger und $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx = 1$ und sei $\phi_n(x) := n^d \phi(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in C(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n * f - f\|_\infty = 0.$$

(b) Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

(*Hinweis:* Approximationssatz, (a) sowie Aufgabe 3(b) von Blatt 8.)

Zusatzaufgabe 5. Für $d, n \in \mathbb{N}$ seien $f_n, \phi_n \in C([-1,1])$ definiert durch

$$f_n(t) = (1-t^2)^n \quad \text{und} \quad \phi_n(t) := \frac{f_n(t)}{\int_{-1}^1 f_n(s)ds}.$$

Sei ferner $g \in C([0,1]^d)$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\int_{-1}^{1} f_n(s)ds \geq \frac{2}{n+1}$.

(b) Für jedes $\epsilon > 0$ und $\delta \in (0,1)$ gibt es ein n_0 mit $\int_{[-\delta,\delta]} \phi_n(t)dt \geq 1-\epsilon$ für alle $n \geq n_0$. (*Hinweis:* $\lim_{n\to\infty}(n+1)(1-\delta)^n = 0$.)

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$g_n(x) := \int_{[0,1]^d} (\phi_n(x_1 - y_1)\cdots\phi_n(x_d - y_d))\, g(y)dy \qquad \text{für } x \in [0,1]^d$$

ein Polynom in $x_1, \ldots, x_d$; genauer existieren Zahlen $a_{k_1,\ldots,k_d} \in \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_d=0}^{2n} a_{k_1,\ldots,k_d} x_1^{k_1}\cdots x_d^{k_d} \quad \text{für alle } x \in [0,1]^d.$$

(d) Für jedes $\alpha \in (0, 1/2)$ konvergiert die Folge der Polynome $(g_n)_n$ auf $[\alpha, 1-\alpha]^d$ gleichmäßig gegen g.