Übung zur Analysis 3
Blatt 11

Abgabe bis Do, 21.01., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x+iy) = (x^2+y^2-2)(x-iy).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f, aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie: f ist in $z = x+iy$ genau dann komplex differenzierbar, wenn $|z| = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass im Fall $|z| = 1$ gilt: $f'(z) = \bar{z}^2$.

Aufgabe 2. Seien $u, v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f = u + iv\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und

$$\partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), \qquad \partial_{\bar{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f).$$

Nach Vorlesung ist also f ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$, und in dem Fall gilt $f'(z) = \partial_z f(z)$. Ferner sei $\bar{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}} \bar{f}$ und $\overline{\partial_{\bar{z}} f} = \partial_z \bar{f}$. Sind f und $\bar{f}$ holomorph, so ist f konstant.

(b) Ist $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, so gilt

$$\partial_z(fg) = (\partial_z f)g + f(\partial_z g) \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}}(fg) = (\partial_{\bar{z}} f)g + f(\partial_{\bar{z}} g).$$

(c) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ gilt $\partial_z(z^k \bar{z}^l) = kz^{k-1}\bar{z}^l$ und $\partial_{\bar{z}}(z^l \bar{z}^k) = kz^l \bar{z}^{k-1}$.

(d) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f(z) = |z|^4 - 2|z|^2$, komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 3. (a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig *reell* differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann für den *Laplace-Operator* $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ gilt:

$$\Delta f = 4\partial_z \partial_{\bar{z}} f = 4\partial_{\bar{z}} \partial_z f$$

Folgern Sie: Ist f holomorph, so sind der Realteil $\mathrm{Re} f$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im} f$ harmonisch in dem Sinn, dass $\Delta \mathrm{Re} f = 0 = \Delta \mathrm{Im} f$.

(b) Prüfen Sie jeweils, ob es holomorphe Funktionen $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$\mathrm{Re} f(x+iy) = x^2 - y^2 - x, \qquad \mathrm{Re}\, g(x+iy) = x^2 + y^2 - x.$$

Geben Sie jeweils eine solche Funktion an oder begründen Sie, warum es keine geben kann.

Aufgabe 4. (a) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

indem Sie die Sätze von Beppo-Levi und über dominierte Konvergenz auf die Funktion $(k,l) \mapsto a_k b_l$ und das Zählmaß auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ anwenden.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$, und folgern Sie $\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Für letzteres Aufgabe 2(a) von Blatt 12 der Analysis 1 verwenden.)

Zusatzaufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und 2π-periodisch. Zeigen Sie:

(a) Die Fourier-Koeffizienten $\widehat{f'(k)}$ von f' erfüllen $\widehat{f'(k)} = ik\widehat{f(k)}$.

(b) Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f(k)}|$ konvergiert.
(*Hinweis:* Benutzen Sie (a) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.)

(c) Die Folge $(S_n f)_n$, definiert durch $(S_n f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f(k)}\mathrm{e}^{ikx}$, konvergiert gleichmäßig.

(d) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n f)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.