Übung zur Analysis 3
Blatt 12

Abgabe bis Do, 28.01., 12 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-5 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

die Integrale

$$\text{(a)} \int_{\partial B_1(1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz, \text{ wobei } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{(b)} \int_{\partial B_R(0)} \frac{e^z}{(z-2)^2 z} dz \text{ für } R = 1,$$

$$\text{(c)} \int_{\partial B_R(0)} \frac{e^z}{(z-2)^2 z} dz \text{ für } R = 4.$$

Bilden Sie für (c) die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{(z-2)^2 z} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{(z-2)^2}$.

Aufgabe 2. Zur Berechnung der Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

integrieren wir die Funktion $z \mapsto e^{-z^2}$ der Wege $\gamma_{1,R}, \gamma_{2,R}, \gamma_{3,R} \colon [0, R] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \qquad \gamma_{2,R}(t) = R + it, \qquad \gamma_{3,R}(t) = t + it,$$

und betrachten den Grenzübergang $R \to \infty$. Zeigen Sie

(a) $\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz$.

(b) $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz = 0$. (*Hinweis:* $e^{t^2-R^2} \leq e^{R(t-R)}$ für $0 \leq t \leq R$).

(c) Die beiden gesuchten Integrale sind jeweils $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. (*Hinweis:* Gaußsches Fehlerintegral.)

Aufgabe 3. (a) Seien f, g ganze Funktionen und $|g(z)| \leq a|f(z)|$ sowie $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein festes $a > 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $b \in \mathbb{C}$ existiert mit $g(z) = bf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Sei f eine ganze Funktion mit beschränkten Realteil, also $|f(z) + \overline{f(z)}| < C$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein $C > 0$. Zeigen Sie, dass dann f konstant ist.
(*Hinweis:* Betrachten Sie zum Beispiel die Funktion $z \mapsto \exp(f(z))$.)

(c) Sei f eine ganze Funktion und gelte $|f(z)| < a|z| + b|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und feste $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass dann $c, d \in \mathbb{C}$ existieren mit $f(z) = cz + d$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4. (*Maximumprinzip*) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z \in U$ und $r > 0$ mit $B_r(z) \subseteq U$ und $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(t) := f(z + re^{it}).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion g sind gegeben durch

$$\hat{g}(k) = 0 \text{ für } k \leq -1, \qquad \hat{g}(k) = \frac{r^k\sqrt{2\pi}}{k!} f^{(k)}(z) \text{ für } k \geq 0.$$

Für $k+1 \leq 0$, also $k \leq -1$, ist der Integrand $f(\xi)/(\xi - z)^{k+1}$ holomorph und somit das Integral links 0, also $\hat{g}(k) = 0$. Für $k+1 \geq 1$, also $k \geq 0$, liefert die Cauchysche Integralformel für das Integral links $f^{(k)}(z)$. Damit folgt die Behauptung.

(b) Ist $|f(z)| \geq |g(t)|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $\hat{g}(k) = 0$ für alle $k \neq 0$ und g ist konstant. (*Hinweis:* Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und (a).)

(c) Ist $|f(z)| \geq |g(t)|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist f auf $B_r(z)$ konstant (nicht nur auf $\partial B_r(z)$).

(d) Folgern Sie: Ist U zusammenhängend, der Abschluss $\overline{U}$ kompakt und $|f|$ stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbar, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand $\partial U = \overline{U} \setminus U$ an, also $\sup_{z\in\overline{U}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial U} |f(z)|$.

Zusatzaufgabe 5. *(Schwarzsches Lemma)* Sei $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ und $f \colon D \to D$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $g \colon D \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

ist holomorph.

(b) Es gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$. (*Hinweis:* Zeigen Sie $|g(z)| \leq 1/r$ für alle $r \in (0, 1)$ mit dem Maximumprinzip.)

(c) Falls $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in D$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h. dann existiert ein $c \in \partial D$ mit $f(z) = \mathrm{e}^{it}z$ für alle $z \in D$.