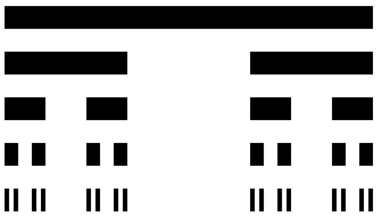
Übung zur Analysis 3
Blatt 1, Zusatzaufgabe

Zusatzaufgabe 4. Die *Cantor-Menge* $C \subset [0,1]$ erhält man, indem man vom Intervall $[0,1]$ das mittlere offene Drittel $(1/3, 2/3)$ entfernt, anschließend aus den beiden verbleibenden Intervallen $[0, 1/3]$ und $[2/3, 1]$ jeweils deren mittleren offenen Drittel entfernt und diesen Prozess unendlich fortsetzt. Folgendes Bild von Wikipedia veranschaulicht das Ausgangsintervall und die verbleibenden Intervalle nach 1 bis 4 Schritten:



Zur exakten Definition setzen wir

$$U_1 := (1/3, 2/3) \quad \text{und} \quad U_{n+1} := \left\{ \frac{x}{3}, \frac{x+2}{3} : x \in U_n \right\} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Dann wird im n-ten Schritt die Menge U_n entfernt und die verbleibende Cantor-Menge ist

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Zeigen Sie: die Cantor-Menge ist

(a) kompakt;

(b) eine Nullmenge. (*Hinweis:* was ist $\mu(U_n)$?)

(c) überabzählbar. (*Hinweis:* Bezeichne $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen von Nullen und Einsen. Zeigen Sie, dass diese Menge überabzählbar ist und durch die Abbildung

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1], \quad A \mapsto \sum_n \frac{2x_n}{3^n},$$

injektiv in die Cantormenge abgebildet wird.)

Lösung: (a) Die Menge $U := \bigcup_n U_n$ ist als Vereinigung offener Mengen offen und $[0,1]$ ist abgeschlossen, also ist C abgeschlossen. Außerdem ist C beschränkt, also nach Analysis 2 kompakt.

(b) Die Mengen U_n sind alle paarweise disjunkt und bestehen jeweils aus 2^{n-1} Intervallen der Länge 3^{-n}. Somit ist

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

und $\mu(C) = \mu([0,1]) - \mu(U) = 1 - 1 = 0$.

(c) Die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist gleichmächtig zur Potenzmenge von N und darum überabzählbar. Die Abbildung nach $[0,1]$ folgt leicht aus der Ungleichung

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} 2x_k/3^k \leq 3^{1-n_0},$$

die für alle $(x_k)_k \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Abbildung in die Cantormenge geht.

Per Induktion über n beweisen wir dazu, dass für jede endliche Folge $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ gilt, dass $\sum_{k=1}^{n} 2x_k/3^k$ in $[0,1] \setminus (U_1 \cap \dots \cap U_n)$ liegt. Für $n = 1$ ist diese Behauptung offensichtlich wahr. Angenommen, sie gilt für n. Sei $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$ und

$$y = \sum_{k=1}^{n} 2x_{k+1}/3^k, \quad x = \sum_{k=1}^{n+1} 2x_k/3^k.$$

Dann gilt $x = y/3$ oder $x = (2+y)/3$. Nach Induktionsannahme ist $y \notin U_1, \dots, U_n$. Nach Definition folgt $x \notin U_2, \dots, U_{n+1}$. Aus

$$\sum_{k=3}^{\infty} 2x_k/3^k \leq 1/3$$

folgt außerdem $x \notin U_1$. Somit ist $x \notin U_1, \dots, U_{n+1}$ und die Induktionsbehauptung ist bewiesen.

Mit der Abgeschlossenheit der Cantormenge folgt dann, dass die Abbildung tatsächlich in die Cantormenge geht. Übrigens ist diese Abbildung bijektiv.