Übung zur Analysis 3
Blatt 2

Zusatzaufgabe 5. Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{d+1}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Im Fall $d = 1$ ist für jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq U$ das Bild $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge. Nehmen Sie dazu eine Skizze zur Hilfe.

(b) Auch im allgemeinen Fall ist für jeden abgeschlossenen Würfel $Q \subseteq U$ das Bild $f(Q) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

(c) Das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge. Verwenden Sie dazu ohne Beweis, dass eine Folge abgeschlossener Würfel $Q_n \subseteq U$ mit $\bigcup_n Q_n = U$ existiert.

Lösung: (a) Da $|f'|$ stetig und $[a, b]$ kompakt ist, nimmt $\|f'\|$ auf $[a, b]$ ein Maximum C an. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Setze $N := \lceil C(b - a)/\epsilon \rceil$ ($\lceil \lambda \rceil$ ist die kleinste Zahl in $[0, \infty]]$, die größer oder gleich λ ist), setze

$$x_n := a + \frac{2n-1}{2N}(b - a)$$

für $n = 1, \dots, N$ (das sind die Mittelpunkte von N Teilintervallen von $[a, b]$) und sei $Q_n \subseteq \mathbb{R}^2$ für $n = 1, \dots, n$ der Würfel mit Mittelpunkt $f(x_n)$ und Kantenlänge 2ϵ.

Dann liegt das Bild von $f([a, b])$ in der Vereinigung der Würfel Q_n: für jedes $x \in [a, b]$ existiert ein $n \in \{1, \dots, N\}$ mit $|x - x_n < \epsilon/2C$, und aus $\|f'\| \le C$ folgt $|f(x) - f(x_n)\| \le \epsilon/2$ und somit $f(x) \in Q_n$.

Somit folgt

$$\mu^*(f([a, b])) \le \sum_{n=1}^{N} \mu(Q_n) = \sum_{n=1}^{N} 4\epsilon^2 \le 4\left(1 + \frac{C(b-a)}{\epsilon}\right)\epsilon^2 = 4C(b - a)\epsilon + 4\epsilon^2.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu^*(f([a, b])) = 0$.

(b) Der Beweis funktioniert ganz ähnlich. Ist $Q = \prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i]$, so zerlegt man jedes Intervall $[a_i, b_i]$ in $N_i := \lceil Cd(b_i - a_i)/\epsilon \rceil$ Teilintervalle, somit Q in $N := N_1 \cdot \dots \cdot N_d$ Teilwürfel. Seien $x_1, \dots, x_N$ die Mittelpunkte dieser Teilwürfel. Jeder der Teilwürfel hat dann Durchmesser kleiner oder gleich $\sqrt{d \cdot \epsilon^2/(Cd)^2}$, also kleiner oder gleich ϵ/C. Somit gibt es für jedes $x \in Q$ ein n mit $\|x - x_n\| \le \epsilon/C$. Dann folgt $\|f(x) - f(x_n)\| \le \epsilon$. Sei $Q_n \in \mathbb{R}^{d+1}$ der Würfel mit Mittelpunkt x_n und Kantenlänge 2ϵ. Dann ist $f(Q)$ in $\bigcup_n Q_n$ enthalten und somit

$$\mu^*(f(Q)) \le \sum_{n=1}^{N} (2\epsilon)^{d+1} = N(2\epsilon)^{d+1} \le \prod_{i=1}^{d}\left(Cd\frac{b_i - a_i}{\epsilon} + 1\right)(2\epsilon)^{d+1}.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu^*(f(Q)) = 0$.

(c) Für solch eine Folge Q_n folgt $\mu^*(f(U)) \le \sum_n \mu^*(f(Q_n)) = 0$ aus (b).