Übung zur Analysis 3
Blatt 3

Zusatzaufgabe 5. Sei $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ definiert wie in Aufgabe 2 und μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(a) Für jede endliche Menge disjunkter Würfel $W_1, \dots, W_n \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\nu(W_1 \cup \cdots \cup W_n) = \nu(W_1) + \cdots + \nu(W_n).$$

(b) Für jede beschränkte offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt $\mu(U) \leq \nu(U)$.

(c) Es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $A \subseteq [0,1]^d$ mit $\nu(A) = 1$.

Lösung: (a) Sei $W = \bigcup_i W_i$. Dann ist $I_N(W) = \bigcup_i I_N(W_i)$ und somit $\sharp I_N(W) = \sum_i \sharp I_N(W_i)$ und mit der Konvergenzaussage in 2(b) folgt, dass $\sharp I_N(W)/N^d$ gegen die Summe $\sum_i \nu(W_i)$ konvergiert.

(b) Nach Vorlesung gibt es eine Folge fast-disjunkter Würfel W_n mit $U = \bigcup_{n=1}^\infty W_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt (man überlege sich, dass (a) angewendet werden darf)

$$\nu(U) \geq \nu\left(W_1 \cup \cdots \cup W_n\right) = \sum_{i=1}^n \nu(W_i) = \sum_{i=1}^n \mu(W_i) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(U).$$

(c) Man betrachte $A := ([0,1] \cap \mathbb{Q})^d$. Als abzählbare Menge ist A eine Nullmenge, aber offenbar ist $I_N(A) = \{0, \dots, N\}^d$ und somit $\nu(A) = 1$.