Übung zur Analysis 3
Blatt 4

Zusatzaufgabe 5. (*Die Cantor-Volterra-Funktion*) Wir betrachten den Raum

$$X := \{f \in C([0,1]) : f \text{ ist monoton mit } f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 1\}$$

mit der von der Supremumsnorm induzierten Metrik

$$d(f,g) := \|f-g\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Für jedes $f \in X$ definieren wir eine Funktion $Tf\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$(Tf)(t) := \begin{cases} \frac{1}{2} f(3t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}(1 + f(3t-2)), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Bezeichne $C \subseteq [0,1]$ die Cantormenge von Blatt 1 und sei $U := [0,1] \setminus C$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $f \in X$ ist Tf wohldefiniert und ein Element von X, d.h. T bildet X in sich selbst ab.

Lösung: Sei $f \in X$. Dann ist Tf wohldefiniert, denn für $t = 1/3$ ist $f(3t)/2 = 1/2$ und für $t = 2/3$ ist ebenfalls $(1 + f(3t-2))/2 = 1/2$. Offenbar ist Tf monoton und stetig.

(b) Für alle $f, g \in X$ gilt $d(Tf, Tg) \leq \frac{1}{2} d(f,g)$.

Lösung: Je nach Lage von $t \in [0,1]$ bezüglich $1/3$ und $2/3$ findet man stets $|Tf(t) - Tg(t)| \leq \|f - g\|$ und darauf folgt die Behauptung.

(c) Es gibt genau ein $f_C \in X$ mit $Tf_C = f_C$. (*Hinweis:* Banachscher Fixpunktsatz.)

Lösung: Nach Analysis II ist $C([0,1])$ vollständig bezüglich der Supremumsnorm, und dann sieht man leicht, dass auch X vollständig ist. Nun benutzt man (a) und den Banachschen Fixpunktsatz.

(d) U ist die Vereinigung einer Folge disjunkter offener Intervalle, auf denen f jeweils konstant ist.

Lösung: Seien die Mengen $U_1, U_2, \ldots$ definiert wie in Aufgabe 5 von Blatt 1. Offenbar ist jedes U_n eine disjunkte Vereinigung von 2^{n-1} offenen Intervallen. Ferner ist $f_C = Tf_C$ konstant auf U_1. Aus der Gleichung $f_C = Tf_C$ folgert man induktiv, dass dann f_C auch konstant ist auf jedem der 2^{n-1} disjunkten offenen Intervalle, die U_n ergeben. Die Vereinigung all dieser offenen Intervalle ist gerade U.

(e) Es gilt $\mu(f_C(U)) = 0$ und $\mu(f_C(C)) = 1$ (obwohl $\mu(U) = 1$ und $\mu(C) = 0$ nach Blatt 1).

Lösung: Da f_C auf jedem der Intervalle aus (d) konstant ist und deren Vereinigung U ist, ist $f_C(U)$ abzählbar und somit eine Nullmenge. Da f_C nach dem Zwischenwertsatz surjektiv ist, muss $f_C(C) \supseteq [0,1] \setminus f_C(U)$ gelten und somit $\mu(f_C(C)) = 1$.

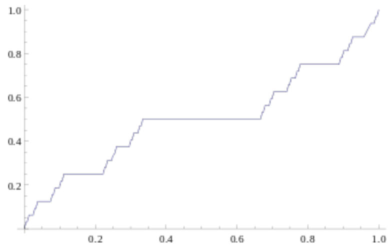

Bild der Cantor-Volterra-Funktion f_C aus Wikipedia