Übung zur Analysis 3
Blatt 5

Zusatzaufgabe 5. Bezeichne $C \subseteq [0,1]$ die Cantor-Menge, $U := [0,1] \setminus C$ deren Komplement und $f_C \colon [0,1] \to [0,1]$ die Cantor-Volterra-Funktion wie in Aufgabe 5 von Blatt 4. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $g \colon [0,1] \to [0,2]$, definiert durch $g(t) := t + f_C(t)$, ist ein *Homöomorphismus*, was nach Definition bedeutet, dass g stetig und bijektiv ist sowie dass die Umkehrfunktion $g^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ ebenfalls stetig ist.

Lösung: Die Funktion g ist offenbar (i) stetig, außerdem (ii) streng monoton wachsend, also injektiv, und (iii) wegen $g(0) = 0$ und $g(1) = 2$ nach dem Zwischenwertsatz bijektiv. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist f^{-1} nach einem Satz der Analysis II auch stetig.

(b) Die Bilder $g(C)$ und $g(U)$ sind messbar und haben jeweils Maß 1.

Lösung: Da g^{-1} stetig ist, ist mit U auch $g(U)$ offen und mit C auch $g(C)$ abgeschlossen. Ferner ist U eine Vereinigung abzählbar vieler Intervalle U_n, deren Bilder unter g jeweils paarweise disjunkt sind und dasselbe Maß haben wie die Intervalle U_n selbst. Also hat $g(U)$ dasselbe Maß wie U, also 1. Da $[0,2]$ die disjunkte Vereinigung von $g(C)$ und $g(U)$ ist, muss $g(C)$ Maß $2 - 1 = 1$ haben.

(c) Die Cantor-Menge C enthält eine Nullmenge T, deren Bild unter dem Homöomorphismus g nicht messbar ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie Korollar 34 des Skriptes.)

Lösung: Das Bild $g(C)$ enthält nach dem Korollar eine nicht-messbare Teilmenge und deren Urbild unter g hat die gewünschten Eigenschaften.