Übung zur Analysis 3
Blatt 6

Zusatzaufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0 \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Schränken Sie sich dazu auf den Fall $f \geq 0$ ein und betrachten Sie die Werte

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1)} f(x+n)\, d\mu(x) \quad \text{und} \quad \int_{[0,1)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\, d\mu(x).$$

Lösung: Ist f wie gegeben, so kann man sich offenbar durch Betrachtung von f_- und f_+ auf den Fall $f \geq 0$ einschränken. Wir verwenden nacheinander die Integrierbarkeit von f, den Satz von Beppo-Levi, die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes und Aufgabe 3(a) von Blatt 5 und finden

$$\begin{aligned}\infty > \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{[n,n+1)} f(x)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1)} f(x+n)\, d\mu(x) = \int_{[0,1)} \sum_{n=0}^{\infty} f(x+n)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Damn muss aber auch der letzte Integrand, also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n),$$

für μ-fast alle $x \in [0,1)$ endlich sein. Daraus folgt, dass $(f(x+n))_n$ für μ-fast alle $x \in [0,1)$ eine Nullfolge ist. Analog sieht man, dass $(f(x-n))_n$ für μ-fast alle $x \in [0,1)$ eine Nullfolge ist. Damit folgt die Behauptung.