Übung zur Analysis 3
Blatt 8

Zusatzaufgabe 5. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und es gelte $f, f', f'' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie die *Fourierumkehrformel*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

in folgenden Schritten

(a) Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ ist eine L^1-Funktion. Zeigen Sie dafür, dass $|\xi^2 f(\xi)| \leq \|f''\|_1$ gilt.

Lösung: Nach Blatt 6, Aufgabe 2(b), und nach Definition der Fouriertransformation gilt

$$|\xi^2 \widehat{f}(\xi)| = |\xi\widehat{(f')}(\xi)| = |\widehat{(f'')}(\xi)| \leq \|f''\|_1$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Somit ist $\|f''\|_1/|\xi|^2$ auf $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ eine integrierbare Majorante von $\widehat{f}$. Auf $[-1, 1]$ ist $\widehat{f}$ integrierbar, weil durch $\|f\|_1$ beschränkt.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-t^2\xi^2/2} e^{i\xi x} d\xi$. (Warum?)

Lösung: Da $\lim_{t\to 0} \mathrm{e}^{-t^2\xi^2/2} = 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und $|\mathrm{e}^{-t^2\xi^2/2}| \leq 1$ für alle $t, \xi \in \mathbb{R}$, folgt die Behauptung aus dem Satz über dominierte Konvergenz.

(c) $\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-t^2\xi^2/2} e^{i\xi x} d\xi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2} f(x + tz) dz$: Fubini, Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Aufgabe 4.

Lösung: Da $\xi \mapsto \hat{f}(\xi) e^{-t^2\xi^2/2} e^{i\xi x}$ integrierbar ist, folgt nach Tonelli und Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-t^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{i\xi x} d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} \mathrm{e}^{-t^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{i\xi x}\, dy\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi y} \mathrm{e}^{-t^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{i\xi x}\, d\xi\, dy.\end{aligned}$$

Wir substituieren $y = x + tz$ und $\eta = t\xi$. Wegen $dy/dz = t$ und $d\eta/d\xi = t$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-t^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{i\xi x}\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} f(x + tz) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi(x-(x+tz))} \mathrm{e}^{-t^2\xi^2/2} t\, d\xi\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x + tz) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\eta z} \mathrm{e}^{-\eta^2/2}\, d\eta\, dz.\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 4 ist das Integral über η gerade $\mathrm{e}^{-z^2/2}$. Damit folgt die Behauptung.

(d) Der Grenzwert ist $f(x)$.

Lösung: Da f stetig ist, konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $\mathrm{e}^{-z^2/2} f(x+tz)$ für $t \to 0$ gegen $f(x)\mathrm{e}^{-z^2/2}$. Da f nach Blatt 6, Aufgabe 2, beschränkt ist und $z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2/2}$ integrierbar ist, folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz und mit dem Gaußschen Fehlerintegral

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2/2} f(x + tz) dz = f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2/2} dz = f(x).$$