Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 3
Blatt 9

Zusatzaufgabe 5. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *schnell fallend*, falls sie beliebig oft differenzierbar ist und für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $x \mapsto x^k f^{(l)}(x)$ beschränkt ist. Sehr nützlich beim Studium der Fourier-Transformation ist der *Schwartz-Raum*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f \text{ ist schnell fallend}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ein dichter Unterraum von $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.
Lösung: Ist $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, so ist $x \mapsto (1 + x^2)f(x)$ beschränkt, also auch $x \mapsto |f(x)(1 + x^2)|^p$ beschränkt durch ein $C > 0$, also, da $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)(1 + x^2)|^p \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^p} dx \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2} dx < \infty.$$

Somit ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Offenbar gilt $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und nach Aufgabe 4(a) ist der erste Raum bereits dicht in $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

(b) Definieren wir für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen Df, Pf durch $(Df)(x) := if'(x)$ und $(Pf)(x) := xf(x)$, so gilt für jedes $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ erstens $Df, Pf \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und zweitens $\widehat{Df} = -P\hat{f}$ sowie $\widehat{Pf} = D\hat{f}$.
Lösung: $Df, Pf \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist klar und die Formeln für die Fourier-Transformation wurden in Aufgabe 1 und 2 von Blatt 6 gezeigt.

(c) Die Fourier-Transformation bildet $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ bijektiv auf sich selbst ab.
(*Hinweis:* Aufgabe 5 von Blatt 8.)
Lösung: Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Dann ist $\hat{f}$ schnell fallend, denn nach (b) gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$|(P^k D^l \hat{f})(\xi)| = |\hat{g}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_1 \quad \text{mit } g := D^k P^l f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Die Fourier-Transformation bildet also $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ auf sich selbst ab. Nach der Umkehrformel von Blatt 5 ist sie auf $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ bijektiv.

(d) Es gilt die *Plancherel-Formel* $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Lösung: Wir können hier Tonelli/Fubini anwenden sowie die Inversionsformel vom Blatt 5 und sehen

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(\xi)} f(x) \mathrm{e}^{-ix\xi} dx\, d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{ix\xi}} f(x) dx\, d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{ix\xi}} d\xi\, f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(x) dx = \langle f, f \rangle.
\end{aligned}$$