Übung zur Analysis 3
Blatt 10

Zusatzaufgabe 5. Für $d, n \in \mathbb{N}$ seien $f_n, \phi_n \in C([-1,1])$ definiert durch

$$f_n(t) = (1-t^2)^n \quad \text{und} \quad \phi_n(t) := \frac{f_n(t)}{\int_{-1}^1 f_n(s)ds}.$$

Sei ferner $g \in C([0,1]^d)$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\int_{-1}^1 f_n(s)ds \geq \frac{2}{n+1}$.
Lösung: Für $0 \leq t \leq 1$ ist $1-t^2 \geq 1-t \geq 0$ und somit

$$\int_{-1}^1 f_n(s)ds = 2\int_0^1 (1-s^2)^n ds \geq 2\int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{2}{n+1}.$$

(b) Für jedes $\epsilon > 0$ und $\delta \in (0,1)$ gibt es ein n_0 mit $\int_{[-\delta,\delta]} \phi_n(t)dt \geq 1-\epsilon$ für alle $n \geq n_0$. (*Hinweis:* $\lim_{n\to\infty}(n+1)(1-\delta)^n = 0$.)
Lösung: Sei $\delta \in (0,1)$ und $\epsilon > 0$. Nach Analysis 1 gilt $\lim_{n\to\infty}(n+1)(1-\delta)^n = 0$. Somit gibt es ein n_0 mit $(n+1)(1-\delta)^n \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ folgt dann

$$\phi_n(t) \overset{(a)}{\leq} \frac{n+1}{2} f_n(t) = \frac{n+1}{2}(1-t^2)^n \leq \frac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } t \in [\delta, 1],$$

also

$$\int_\delta^1 \phi_n(t)dt \leq \frac{\epsilon}{2}$$

und wegen $\int_{-1}^1 \phi_n(t)dt = 1$ dann auch die Behauptung.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$g_n(x) := \int_{[0,1]^d} (\phi_n(x_1-y_1)\cdots\phi_n(x_d-y_d))\, g(y)dy \qquad \text{für } x \in [0,1]^d$$

ein Polynom in $x_1, \ldots, x_d$; genauer existieren Zahlen $a_{k_1,\ldots,k_d} \in \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_d=0}^{2n} a_{k_1,\ldots,k_d} x_1^{k_1}\cdots x_d^{k_d} \quad \text{für alle } x \in [0,1]^d.$$

Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren nach der binomischen Formel Funktionen b_k mit

$$\phi_n(t-s) = \sum_{k=0}^{2n} t^k b_k(s).$$

Dann folgt

$$\phi_n(x_1-y_1)\cdots\phi_n(x_d-y_d) = \sum_{k_1,\ldots,k_d=0}^{2n} b_{k_1}(y_1)x_1^{k_1}\cdots b_{k_d}(y_d)x_d^{k_d}$$

und g_n hat die gewünschte Form mit

$$a_{k_1,\ldots,k_d} = \int_{[0,1]^d} b_{k_1}(y_1)\cdots b_{k_d}(y_d)g(y)dy.$$

(d) Für jedes $\alpha \in (0, 1/2)$ konvergiert die Folge der Polynome $(g_n)_n$ auf $[\alpha, 1-\alpha]^d$ gleichmäßig gegen g.

Lösung: Sei $\epsilon > 0$. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(y) - g(y')| < \epsilon \text{ für alle } y, y' \in [0,1]^d \text{ mit } \|y - y'\|_\infty \leq 2\delta.$$

OBdA. ist $\delta < 1 - \alpha$. Außerdem existiert nach (c) ein n_0 mit

$$\int_{-\delta}^{\delta} \phi_n(t)dt > 1 - \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Sei nun $n \geq n_0$. Wir setzen g außerhalb von $[0,1]^d$ durch Null fort, substituieren $z = x - y$ im Integral in (c) und erhalten für $x \in [\alpha, 1-\alpha]^d$:

$$\begin{aligned} g_n(x) &:= \int_{[0,1]^d} (\phi_n(x_1 - y_1) \cdots \phi_n(x_d - y_d))\, g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\phi_n(z_1) \cdots \phi_n(z_d))\, g(x-z)dz \\ &= \int_{[-1+\alpha, 1-\alpha]^d} \phi_n(z_1) \cdots \phi_n(z_d) g(x-z)dz. \end{aligned}$$

Nach Wahl von n_0 ist dann

$$\left| g(x) - \int_{[-1+\alpha,1-\alpha]^d} \phi_n(z_1) \cdots \phi_n(z_d) g(x) dz \right| \leq (1-\epsilon)^d g(x)$$

und

$$\begin{aligned} &\left| g_n(x) - \int_{[-1+\alpha,1-\alpha]^d} \phi_n(z_1) \cdots \phi_n(z_d) g(x)dz \right| \\ &\leq \int_{[-1+\alpha,1-\alpha]^d} \phi_n(z_1) \cdots \phi_n(z_d) |g(x-z) - g(x)| dz. \end{aligned}$$

Nun integrieren wir separat über $[-\delta, \delta]^d$ und den Rest und erhalten, indem wir die gleichmäßige Stetigkeit und (b) nutzen,

$$\int_{[-1+\alpha,1-\alpha]^d} \phi_n(z_1) \cdots \phi_n(z_d) |g(x-z) - g(x)| dz \leq \epsilon + (1-\epsilon)^d 2 \|g\|_\infty.$$

Zusammengesetzt erhalten wir

$$|g_n(x) - g(x)| \leq 3(1-\epsilon)^d \|g\|_\infty + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.