**Übung zur Analysis 3**
**Blatt 11**

**Zusatzaufgabe 5.** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $2\pi$-periodisch. Zeigen Sie:

(a) Die Fourier-Koeffizienten $\widehat{f'(k)}$ von $f'$ erfüllen $\widehat{f'(k)} = ik\widehat{f(k)}$.
*Lösung:* Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\widehat{f'(k)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(k)\mathrm{e}^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(k)\mathrm{e}^{-ikx}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(k)(-ik)\mathrm{e}^{-ikx} dx \\
&= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(k)\mathrm{e}^{-ikx} dx = ik\widehat{f(k)}.
\end{aligned}$$

(b) Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f(k)}|$ konvergiert.
(*Hinweis:* Benutzen Sie (a) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.)
*Lösung:* Die Parsevalsche Gleichung liefert

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k\widehat{f(k)}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'(k)}| < \infty.$$

Dem Hinweis entsprechend können wir folgern:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f(k)}| = |\widehat{f(0)}| + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f(k)}k|\frac{1}{k}$$

und

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f(k)}k|\frac{1}{k} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k\widehat{f(k)}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty.$$

(c) Die Folge $(S_n f)_n$, definiert durch $(S_n f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f(k)}\mathrm{e}^{ikx}$, konvergiert gleichmäßig.
*Lösung:* Sei $\epsilon > 0$. Nach (b) gibt es ein $N$ mit $\sum_{|k|>N} |\widehat{f(k)}| < \epsilon$. Wegen $|\mathrm{e}^{ikx}| = 1$ folgt dann $|(S_n f)(x) - (S_m f)(x)| < \epsilon$ für alle $n, m > N$ und $x \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n f)_n$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.
*Lösung:* Das kann man aus dem Satz der Vorlesung über die Konvergenz gegen die arithmetischen Mittel schlussfolgern, oder daraus, dass $(S_n f)_n$ in der $L^2$-Norm gegen $f$ konvergiert.