## Definition Vektorraum

**Definition** *Ein Vektorraum über einem Körper $K$ besteht aus:*

1. *einer Menge $V$ (der "Vektoren"),*
2. *einer Abbildung $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$,*
3. *einer Abbildung $K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$,*

*die folgende Bedingungen erfüllen:*

4. *die Vektoraddition ist assoziativ, kommutativ, besitzt ein neutrales Element $0 \in V$ und jeder Vektor $v$ hat ein Inverses $-v$*
5. *die Skalarmultiplikation ist assoziativ, distributiv, und $1 \in K$ wirkt als neutrales Element*

Hierbei können wir **1.**, **2.** und **4.** zusammenfassen:

**Definition** *Ein Vektorraum über einem Körper $K$ ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ mit einer Abbildung wie in **3.**, die **5.** erfüllt.*



## Definition einer Basis eines Vektorraumes $V$

Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ bilden eine Basis von $V$, falls

1. jeder Vektor $w \in V$ eindeutige "Koordinaten"

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K^n \quad \text{mit} \quad w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

besitzt; dann ist ${}_B[v] := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ der *Koordinatenvektor* von $v$ bzgl. $B = (v_1, \ldots, v_n)$;

Äquivalent zu **1.**:

2. die Abbildung $K^n \to V$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_i \lambda_i v_i$, ist bijektiv.

Das beinhaltet:

**2.a** *Surjektivität:* jeder Vektor ist Linearkombination der $v_i$, d.h. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein *Erzeugendensystem*

**2.b** *Injektivität:* aus $\sum_i \lambda_i v_i = \sum_i \lambda'_i v_i$ folgt $\lambda_i = \lambda'_i$ für alle $i$, d.h. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist *linear unabhängig*.

## Beispiel: Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis

**Gesucht:** ${}_B[w]$ für $w := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $B = \left( \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$

**Ansatz:** Löse das Gleichungssystem

$$w = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$$

**Lösung:** ${}_B[w] = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$

**Allgemein im Fall $V = \mathbb{R}^n$:** mit $B = (v_1 \ \ldots \ v_n)$ gilt $\boxed{w = B \cdot {}_B[w]}$



## Grundlegende Sätze über Basen in einem Vektorraum $V$

**Satz** Für jedes $B \subseteq V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

**(a)** $B$ ist eine Basis.

**(b)** $B$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $V$.

**(c)** $B$ ist ein minimales Erzeugendensystem von $V$.

**Folgerung 1** Jede linear unabhängige Teilmenge $B_0 \subseteq V$ kann zu einer Basis ergänzt werden. *(Verwende (b)⇒(a))*

**Folgerung 2** Jeder Vektorraum hat eine Basis. *(Setze $B_0 = \emptyset$)*

**Satz** (Steinitz) Seien $B, C \subseteq V$ Basen und sei $v \in B$. Dann kann man $B_0 := B \setminus \{v\}$ durch ein $w \in C$ zu einer Basis ergänzen.

**Folgerung 3** Sind $B, C \subseteq V$ Basen, so gilt $|B| = |C| \overset{\text{Def}}{=:} \dim V$.

## Beispiele für lineare Abbildungen

1. Für jede Familie von Vektoren $\underbrace{w_1, \ldots, w_m}_{=:D} \in W$ die Abbildung
$$s_D \colon K^m \to W,\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 w_1 + \cdots \lambda_m w_m.$$
2. Für jede Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ die Koordinaten-Abb.
$$c_B \colon V \to K^n,\ v \mapsto {}_B[v].$$
Dies ist ein Isomorphismus mit $c_B^{-1} = s_B$.
3. Auf dem $\mathbb{R}$-VR aller konvergenten reellen Folgen die Abbildung
$$(x_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n.$$
4. Auf $V := C([a, b])$ das Integral $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$.



## Lineare Abbildungen von $K^n$ nach $K^m$

5. Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ die Abb. $K^n \to K^n,\ v \mapsto Av$.

**Satz** Für jede lineare Abbildung $f \colon K^n \to K^m$ gibt es genau ein $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ mit $f(v) = Av$ für alle $v \in K^n$.

**Beweis**
$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\right) &= f\left(\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda_1 f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n f\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots f\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{=:A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Lineare Abbildungen und Basen

Seien $V, W$ Vektorräume und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$.

1. Sei $f\colon V \to W$ linear.
   *Kennt man $f$ auf der Basis $B$ von $V$, so kennt man $f$ überall:*

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

2. Für jede Wahl von $\underbrace{w_1, \ldots, w_n}_{=:D} \in W$ existiert (nach i) genau) eine lineare Abb. $f\colon V \to W$ mit $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n$, und zwar $f = s_D \circ c_B$:

$$f\colon \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \xrightarrow{c_B} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \xrightarrow{s_D} \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n.$$

   Wir erhalten eine Bijektion $\mathrm{Hom}(V, W) \to W^n$,
   $f \mapsto [f]_B := (f(v_1), \ldots, f(v_n))$.



## Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Sei nun $C = (u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von $W$. Ersetzen wir den Bildvektor $f(v_i)$ durch seinen Koordinatenvektor ${}_C[f(v_i)]$ bzgl. $C$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{M}_{m\times n}(K),\ f \mapsto {}_C[f]_B := ({}_C[f(v_1)]\ \cdots\ {}_C[f(v_n)]).$$

Für jedes $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ in $V$ gilt dann

$$\begin{aligned} {}_C[f(v)] &= {}_C[\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)] \\ &= \lambda_1\, {}_C[f(v_1)] + \cdots + \lambda_n\, {}_C[f(v_n)] = {}_C[f]_B \cdot {}_B[v], \end{aligned}$$

d.h., das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ f\ } & W \\ {\scriptstyle c_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_C} \\ K^n & \xrightarrow[\mapsto {}_C[f]_B]{} & K^m. \end{array}$$

## Beispiel zur Matrixdarstellung linearer Abbildungen

**Gesucht** Die Darstellungsmatrix von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ y - z \end{pmatrix},$$

bezüglich der Basen

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } C = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Lösung** Die Bilder der Basisvektoren von $B$ unter $f$ sind

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und deren Koordinaten bezüglich der Basis $C$ sind

$${}_C[f(v_1)] = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_C[f(v_2)] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_C[f(v_3)] = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist die gesuchte Darstellungsmatrix ${}_C[f]_B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.