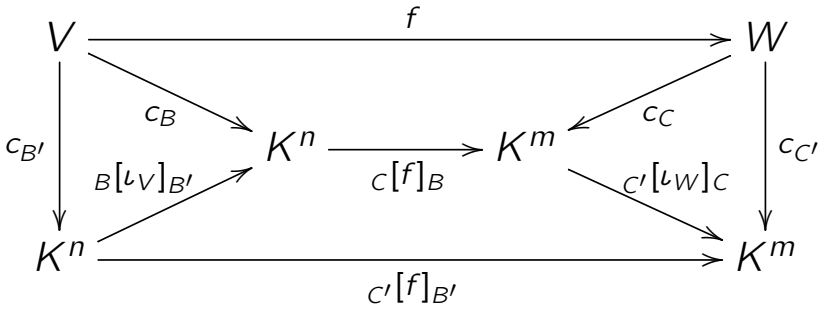
Matrixdarstellung linearer Abbildungen und Basiswechsel

Sei $f\colon V \to W$ linear, B eine Basis von V, C eine Basis von W. Dann kommutiert das folgende Diagramm (siehe letzte Woche):

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle c_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_C} \\ K^n & \xrightarrow[{}_C[f]_B]{} & K^m. \end{array}$$

Für weitere Basen B' und C' liefert das kommutative Diagramm



mit den Basiswechselmatrizen ${}_{C'}[\iota_W]_C$ und ${}_B[\iota_V]_{B'}$ die Beziehung

$$\boxed{{}_{C'}[f]_{B'} = {}_{C'}[\iota_W]_C \cdot {}_C[f]_B \cdot {}_B[\iota_V]_{B'}.}$$

Beispiel zum Basiswechsel

Die Darstellungsmatrix von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+3z \\ y-z \end{pmatrix}$

bezüglich $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

berechnen wir mit Hilfe der Standardbasen E_3 und E_2 wie folgt:

$$\begin{aligned} {}_C[f]_B &= {}_C[\iota_{\mathbb{R}^2}]_{E_2} \cdot {}_{E_2}[f]_{E_3} \cdot {}_{E_3}[\iota_{\mathbb{R}^3}]_B \\ &= {}_{E_2}[\iota_{\mathbb{R}^2}]_C^{-1} \cdot {}_{E_2}[f]_{E_3} \cdot {}_{E_3}[\iota_{\mathbb{R}^3}]_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel eines linearen Gleichungssystems

Gesucht sind $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

oder, äquivalent, $x = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Überlegungen

Allgemeine Form linearer Gleichungssysteme

- Geg.: $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $b \in K^m$
- Ges.: $\{x \in K^n : Ax = b\} = f^{-1}(b)$ für $f\colon K^n \to K^m$, $y \mapsto Ay$.

Beobachtungen

- GLS für alle b eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ f bijektiv $\Leftrightarrow$ A invertierbar; in dem Fall ist $x = f^{-1}(b) = A^{-1}b$
- *Existenz* $\Leftrightarrow f^{-1}(b) \neq \emptyset \Leftrightarrow b \in \mathrm{Bild}(f)$.
  - GLS ist für alle $b \in K^m$ lösbar $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.
  - Seien $a_1, \ldots, a_n \in K^m$ die Spalten von A.
    Dann ist $Ax = x_1a_1 + \cdots + x_na_n$, also:
    $b \in \mathrm{Bild}(f) \Leftrightarrow b \in \mathrm{LH}(a_1, \ldots, a_n)$
    $$\Leftrightarrow \underbrace{\dim \mathrm{LH}(a_1, \ldots, a_n)}_{=\text{Spaltenrang v. } A} = \underbrace{\dim \mathrm{LH}(a_1, \ldots, a_n, b)}_{=\text{Spaltenrang v. } (A\ b)}$$
- *Eindeutigkeit* $\Leftrightarrow |f^{-1}(b)| \leq 1 \Leftrightarrow$ das *homogene* GLS $Ay = 0$ hat nur die Lösung $y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = 0 \Leftrightarrow f$ injektiv
  - Struktur der Lösungsmenge: für alle $x, x' \in L$ ist $f(x - x') = 0$, $x - x' \in \mathrm{Kern}(f)$, also $L = x + \mathrm{Kern}(f)$ ein *affiner Unterraum*
  - Rangsatz: $\dim \mathrm{Kern}(f) = n - \dim \mathrm{Bild}(f) = n -$ Spaltenrang v. A

Der Gaußsche Algorithmus

- Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$ lässt sich durch folgende Zeilenumformungen in Zeilenstufenform überführen:
  1. Hinzuaddieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
  2. Vertauschung von zwei Zeilen
- Im Fall $m = n$ ist die Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn sie mit 1.,2. und
  3. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalaren

  in die Einheitsmatrix E_n umgeformt werden kann
- Zur Lösung von $Ax = b$ bringt man $(A\ b)$ in Zeilenstufenform
- Zum Invertieren von A bringt man $(A\ E_n)$ in die Form $(E_n\ C)$; dann ist $AC = E_n$ und somit $C = A^{-1}$

Zeilenumformungen und Elementarmatrizen (im Fall $m = 4$)

Jede der Zeilenumformungen vom Typ 1,2 und 3 in einer Matrix A wird durch Multiplikation mit einer Elementarmatrix vermittelt, z.B.

- Vertausche Zeilen 1 und 2 ergibt $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} A =: A'$
- Addiere λ-faches von Zeile 1 zu Zeile 2 gibt $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \lambda & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} A'$

$\Rightarrow$ Ist A inv.bar, so findet man Elementarmatrizen $E^{(1)}, \ldots, E^{(k)}$ mit

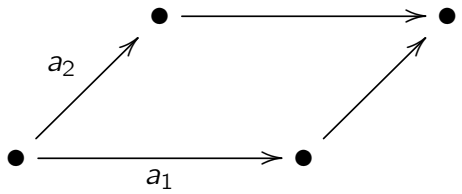
$$E^{(k)} \cdots E^{(1)} A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ also } E^{(k)} \cdots E^{(1)} = A^{-1}$$

Determinanten

Geometrischer Sinn der Determinante

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit den Spalten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.
Diese spannen einen *Spat* (oder *Parallelepiped*) auf:

$$\mathrm{Spat}(a_1, \ldots, a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]\}$$



Idee Die *Determinante* ist das *orientierte Volumen* des Spates:

$$\det A = \mathrm{Vol}(\mathrm{Spat}(a_1, \ldots, a_n)) \text{ oder } \det A = -\mathrm{Vol}(\mathrm{Spat}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Problem Wie definiert man dieses orientierte Volumen?

Was ist die Determinante genau?

Satz Es gibt genau eine Abbildung $\det\colon \mathrm{M}_{n\times n}(K) \to K$, $(a_1 \ \ldots \ a_n) \mapsto \det(a_1 \ \ldots \ a_n)$, die

1. *multilinear* (linear bezüglich jedes einzelnen Argumentes a_i),
2. *alternierend* (im Fall $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ äquivalent: 0, falls $a_i = a_j$ für $i \neq j$),
3. *normiert* ($\det(E_n) = 1$) ist.

Beweisidee *Existenz:* Folgende Abb. erfüllt 1.–3.:

$$A = (a_{ij})_{i,j} \mapsto \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}. \quad \text{(Leibniz-Formel)}$$

Eindeutigkeit: Fall 1: $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig $\overset{\text{(i,ii)}}{\Rightarrow} \det A = 0$
Fall 2: A invertierbar $\overset{\text{(Gauß)}}{\Rightarrow}$ durch Spaltenumformungen vom Typ 1,2, lässt sich A in eine Diagonalmatrix $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ überführen.
Nach 1.,2. ändert die Determinante dabei höchstens das Vorzeichen, und aus 1. und 3. folgt $\det B = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.