Die Sarrus-Regeln zur Berechnung der Determinante

Aus der Leibniz-Formel folgt:

1. Fall $n = 1$: auf $\{1\}$ gibt es nur die Identität,

   $\det(a_{11}) = a_{11}$

2. Fall $n = 2$: auf $\{1, 2\}$ gibt es die Identität und die Vertauschung,

   $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. Fall $n = 3$: auf $\{1, 2, 3\}$ gibt es 6 Permutationen,

   $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Determinante nach Zeile oder Spalte

Folgerung aus der Leibniz-Formel Die Determinante einer Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ kann man mittels folgender "Teilmatrizen" berechnen:

$$B_{ij} := (A \text{ ohne } i\text{-te Zeile und } j\text{-te Spalte}) \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K).$$

Für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i+1}(a_{i1} \det B_{i1} - a_{i2} \det B_{i2} + a_{i3} \det B_{i3} - \cdots) \\ &= (-1)^{j+1}(a_{1j} \det B_{1j} - a_{2j} \det B_{2j} + a_{3j} \det B_{3j} + \cdots) \end{aligned}$$

Folgerung (Cramersche Regel) Ist $A \in M_{n\times n}(K)$ und $\det A \neq 0$, so ist die Matrix A invertierbar. Genauer gilt:

$$A^{-1} = (b_{ij})_{i,j} \text{ mit } b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det B_{ji}}{\det A}.$$

Die Produktformel

Satz Für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Beweis Schreibe $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ und $B = (b_{ij})_{ij}$.
Die Spalten von $C := AB$ sind dann

$$c_j = \sum_k a_k b_{kj}.$$

Da die Determinante multilinear und alternierend ist, folgt

$$\begin{aligned}\det C &= \sum_{k_1,\ldots,k_n} b_{k_1 1} \cdots b_{k_n n} \det(a_{k_1} \ \cdots \ a_{k_n}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) b_{1\pi(1)} \cdots b_{n\pi(n)} \det(A) = \det(B)\det(A).\end{aligned}$$

Eine der wichtigsten Anwendungen der Determinante ist:

Satz Für jedes $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt: A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Beweis "$\Rightarrow$" Ist A invertierbar, so folgt $\det A \neq 0$ aus der Gleichung

$$1 = \det(E_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

"$\Leftarrow$" Ist $\det(A) \neq 0$, so gibt die Cramersche Regel eine Formel für A^{-1}.

Beispiel zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- Das *charakteristische Polynom* von A ist
  $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$
  $\Rightarrow$ Die *Eigenwerte* von A sind also -1, 2 und 1.
- Die *Eigenvektoren* zum Eigenwert 1 sind die Lösungen von
  $$\begin{pmatrix} -1-1 & 0 & 0 \\ -2 & 2-1 & 1 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  Zeilen 1 und 3 liefern $x_1 = 0$, Zeile 2 dann $x_2 + x_3 = 0$
  $\Rightarrow$ die Eigenvektoren zum EW 1 sind alle $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Diagonalisierbare Matrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $Av_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$A(v_1 \ \ldots \ v_n) = (Av_1 \ \ldots \ Av_n)$$

$$= (\lambda_1 v_1 \ \ldots \ \lambda_n v_n) = (v_1 \ \ldots \ v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Ist $B = (v_1 \ \ldots \ v_n)$ invertierbar, so folgt $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Definition **1.** $A, C \in \mathrm{M}_n(K)$ sind *ähnlich* $:\Leftrightarrow B^{-1}AB = C$ für ein B

2. $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist *diagonalisierbar* $:\Leftrightarrow$ A *ähnelt* einer Diagonalmatrix.

Satz $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A hat lin. unabhängige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$

Satz Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.
Beweis $\det(B^{-1}AB - \lambda) = \det(B^{-1}(A - \lambda)B) = \det(A - \lambda)$

Thema nächste Woche

Verallgemeinerte Eigenräume, Elemente der Ringtheorie und die Jordansche Normalform