Rechnen mit Matrizen

Matrizen aus $M_n(K)$ kann man

1. addieren,
2. mit Skalaren (aus K) multiplizieren,
3. miteinander multiplizieren,
4. insbesondere potenzieren und in Polynome einsetzen.

Dabei bedeutet:

- (i)+(ii): $M_n(K)$ ist ein K-Vektorraum;
- (ii)+(iii): $M_n(K)$ ist ein Ring;
- (i)+(ii)+(iii): $M_n(K)$ ist eine Algebra.

Beobachtung Sei $A \in M_n(K)$.
Dann gibt es ein Polynom $p(X) \neq 0$ mit $p(A) = 0$, denn die Matrizen $A^0 = E_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2} \in M_n(K)$ können nicht linear unabhängig sein.

Der Satz von Frobenius

Satz Für jede Matrix $A \in M_n(K)$ gilt $\chi_A(A) = 0$.

Spezialfall Sei A *diagonalisierbar*, etwa $A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1}$.
Dann gilt

- $A^2 = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1} \cdot B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} B^{-1}$,
- für jedes k analog $A^k = B \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} B^{-1}$,
- für jedes Polynom p einfach $p(A) = B \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}$,
- $\chi_A(A) = B \begin{pmatrix} \chi_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_A(\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1} = 0$, weil $\chi_A(\lambda_i) = 0$

Beweis des Satzes von Frobenius

Sei $v \in K^n$. Wir zeigen $\chi_A(A)v = 0$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass

1. $v, Av, \ldots, A^k v \in K^n$ linear unabhängig sind,
2. $A^{k+1}v = \alpha_0 v + \cdots + \alpha_k A^k v$ für gewisse $\alpha_i \in K$.

Ergänze die Vektoren in (i) zu einer Basis B. Dann folgt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} C & * \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ mit } C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Hier ist

- $\chi_A(X) = \chi_D(X)\chi_C(X)$,
- $\chi_C(X) = (-1)^k(X^{k+1} - \alpha_k X^k - \cdots - \alpha_0)$,

also $\chi_A(A)v = \chi_D(A)\chi_C(A)v = 0$.

Die Hauptraumzerlegung

Sei $A \in M_n(K)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Dann ist

- $E_\lambda(A) := \ker(A - \lambda E_n)$ der *Eigenraum von A zum Eigenwert* λ
- $\ker(A - \lambda E_n) \subseteq \ker(A - \lambda E_n)^2 \subseteq \ker(A - \lambda E_n)^3 \subseteq \cdots$
- $H_\lambda(A) := \bigcup_{j \geq 1} \ker(A - \lambda E_n)^j$ der *Hauptraum von A zum EW* λ

Theorem (Hauptraumzerlegung)
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dann gilt:

$$\mathbb{C}^n = H_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus H_{\lambda_k}(A),$$

d.h. für jedes $v \in \mathbb{C}^n$ gibt es eindeutige $v_i \in H_{\lambda_i}(A)$ mit $v = v_1 + \cdots + v_k$.

Folgerung aus der Hauptraumzerlegung

Eine Matrix $N \in M_n(K)$ heißt *nilpotent*, falls $N^r = 0$ für ein r.

Folgerung Jedes $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist ähnlich zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} D_1 + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k + N_k \end{pmatrix} \text{ mit } D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ und } N_i \text{ nilpotent}$$

Beweisidee

1. Jeder Hauptraum $H_{\lambda_i}(A)$ wird von A auf sich selbst abgebildet.
2. Wähle Basen B_i von $H_{\lambda_i}(A)$ und setze $B = (B_1 \ \dots \ B_k)$.Dann:
   1. $\Rightarrow B^{-1}AB$ hat die Form $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$
3. Auf jedem Hauptraum $H_{\lambda_i}(A)$ wirkt A wie $\lambda_i + (A - \lambda_i)$, also wie diagonal + nilpotent. Also hat A_i die Form $D_i + N_i$ wie oben.

Die Jordansche Normalform

Ein *Jordan-Block* ist eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.

Theorem Jedes $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist ähnlich zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix} \text{ mit Jordan-Blöcken } J_1, \dots, J_l$$

Bemerkung Wissen: $A \sim \begin{pmatrix} D_1+N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k+N_k \end{pmatrix}$ mit N_i nilpotent.

Man zeigt dann: $N_i \sim \begin{pmatrix} 0 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ mit $* \in \{0, 1\}$.

Beweisidee zur Hauptraumzerlegung

- Schreibe $\chi_A(X) = (X-\lambda_1)^{r_1}\cdots(X-\lambda_k)^{r_k}$ und setze

$$p_i(X) := \prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{r_j}, \quad \text{also} \quad (X-\lambda_i)^{r_i}p_i(X) = \chi_A(X).$$

- Benutze folgenden Satz: Es gibt Polynome $q_1,\ldots,q_k$ mit

$$1 = p_1q_1 + \cdots + p_kq_k.$$

- Dann können wir jedes $v \in \mathbb{C}^n$ schreiben als $v = v_1 + \cdots + v_k$ mit $v_i := p_1(A)q_1(A)v$, und $v_i \in \ker(A-\lambda_i)^{r_i} = H_{\lambda_i}(A)$, weil

$$(A-\lambda_i)^{r_i}v_i = \chi_A(A)q_i(A)v = q_i(A)\chi_A(A)v = 0$$

  nach Frobenius.
- Eindeutigkeit der Zerlegung $v = v_1 + \cdots + v_k$ mit $v_i \in H_{\lambda_i}(A)$ folgt ähnlich.

Der Polynomring ist ein Hauptidealring

Theorem Sei $I \subseteq K[X]$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

1. für alle $a, b \in I$ ist $a+b \in I$,
2. für alle $a \in I$ und $b \in K[X]$ ist $ab \in I$.

Dann existiert ein $a \in K[X]$ mit $I = \{ac : c \in K[X]\}$.
Insbesondere gilt $a|b$ für alle $b \in I$.

Beweis Sei $a \neq 0$ ein Polynom in I mit minimalem Grad und $b \in I$.

- Fall 1: $a|b$.
- Fall 2: $a \nmid b$. Dann existieren (Polynomdivision!) $c, r \in K[X]$ mit

$$b = ac + r \quad \text{und} \quad \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(a).$$

  Es folgt $r = b - ac \in I$ im Widerspruch zur Wahl von a. □

Anwendungen des Theorems über Ideale in Polynomringen

Theorem Sei $I \subseteq K[X]$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

1. für alle $a, b \in I$ ist $a + b \in I$,
2. für alle $a \in I$ und $b \in K[X]$ ist $ab \in I$.

Dann existiert ein $a \in K[X]$ mit $I = \{ac : c \in K[X]\}$.
Insbesondere gilt $a|b$ für alle $b \in I$.

Anwendungen:

1. $I := \{p_1 q_1 + \cdots + p_k q_k : q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{C}[X]\}$ mit $p_1, \ldots, p_k$ wie oben
   $\Rightarrow$ es gibt ein $a \in I$ mit $a|p_i$ für alle i.
   Aber dann folgt $a \in \mathbb{C}$, also $1 \in I$.
2. $I := \{p \in K(X) : p(A) = 0\}$ enthält χ_A und ein normiertes Polynom von kleinstem Grad, das *Minimalpolynom von A*.

Begriffe der Ringtheorie

Analog zu dem Theorem über Polynome kann man beweisen:

Satz Ist a der größte gemeinsame Teiler von $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$, so existieren $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}$ mit $p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n = a$.

Frage Welche Struktur liegt den beiden Aussagen zu Grunde?

Definition Ein *Ring* ist eine Menge R mit Abbildungen $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ so, dass

- $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist,
- die Multiplikation $\cdot$ bzgl. der Addition $+$ distributiv ist und ein neutrales Element 1_R für die Multiplikation existiert.

Beispiele

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, ..., aber nicht $\mathbb{N}$
- die Menge $K[X]$ aller Polynome über einem Körper K
- $M_n(K)$ für jeden Körper K und $M_n(R)$ für jeden Ring R

Teilbarkeit in Ringen und Division mit Rest

Definition Sei R ein kommutativer Ring.

- Ein $a \in R$ *teilt* ein $b \in R$, also $a|b$, falls $b = ac$ für ein $c \in R$.
- R heißt *euklidisch*, falls eine Abbildung $\text{Grad}: R \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ existiert mit $\text{Grad}(0) = -\infty$ und folgenden Eigenschaften:
  - für alle $a, c \in R$ gilt $\text{Grad}(ac) \geq \text{Grad}(a), \text{Grad}(c)$,
  - für alle $a, b \in R$ ex. $c, r \in R$ mit $b = ac + r$ und $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(a)$.
- Ein *Ideal* ist eine Teilmenge $I \subseteq R$ mit $a + b \in I$ und $ac \in I$ für alle $a, b \in I$, $c \in R$.

Satz Sei R ein euklidischer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal.
Dann ist I ein *Hauptideal*, d.h. es gibt ein $a \in I$ mit $I = \{ac : c \in R\}$.

Beweis Wähle $a \in I \setminus \{0\}$ mit minimalem Grad. Sei $b \in I$.
Fall 1: $a|b$.
Fall 2: $b = ac + r$ mit $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(a) \Rightarrow r = b - ac \in I$ ↯. □

Thema nächste Woche

Bilinearformen, Quadriken und euklidische Vektorräume