Themen dieser Woche

Bilinearformen und Euklidische Vektorräume

Kegelschnitte als Beispiele von Quadriken

Gleichung einer Kegelfläche: $x^2 + y^2 = z^2$ (*)
Projizieren den Schnitt mit einer Ebene in die x-y-Ebene:

- Ebene $z = 1$: erhalten mit $x^2 + y^2 = 1$ einen *Kreis*
- Ebene $y + z = 1$: setzen $z = 1 - y$ in (*) ein und erhalten mit $x^2 + y^2 = (1 - y)^2$, also $x^2 = 1 - 2y$ eine *Parabel*
- Ebene $x + y + z = 1$: setzen $z = 1 - (x + y)$ in (*) ein und erhalten mit $x^2 + y^2 = (1 - (x + y))^2$, also $2(x + 1)(y + 1) = -1$ eine *Hyperbel*

Diese Kurven sind Spezialfälle von Quadriken:
Definition Eine *Quadrik* im $\mathbb{R}^n$ ist die Nullstellenmenge eines Polynoms in n Variablen vom Grad ≤ 2, d.h.

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j}_{\text{quadratisch}} + \underbrace{\sum_i b_i x_i}_{\text{linear}} + \underbrace{c}_{\text{konstant}} = 0\right\}$$

für gewisse Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$.

Quadratische Formen und Bilinearformen

Sei V ein reeller Vektorraum.

Definition Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abb. $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$, die in jeder Komponente linear ist, d.h. für alle $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in K$ gilt

$$\Phi(v + \lambda v', w) = \Phi(v, w) + \lambda\Phi(v', w),$$
$$\Phi(v, w + \lambda w') = \Phi(v, w) + \lambda\Phi(v, w').$$

So ein Φ heißt *symmetrisch*, falls $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ für alle $v, w \in V$.

Definition Eine *quadratische Form* auf V ist eine Abb. $q\colon V \to \mathbb{R}$ der Form $q(v) = \Phi(v, v)$ für eine symmetrische Bilinearform Φ.

Dabei ist q durch Φ eindeutig bestimmt, aber auch umgedreht:
$\Phi(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$. (Polarisationsgleichung)

Beispiele und Gegenbeispiele von Bilinearformen

1. Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die zugehörige Bilinearform
$$\Phi_A(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j = x^\top \cdot A \cdot y.$$
Φ_A ist symmetrisch $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j $\Leftrightarrow$ A ist symmetrisch.
2. Das *Standard-Skalarprodukt* auf dem $\mathbb{R}^n$:
$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \Phi_{E_n}(x, y)$$
3. Auf $\mathbb{R}^3$: $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_1^2y_3 + x_3y_2$? Nein!
4. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in U$.
Dann ist die *zweite Ableitung* $f''(u)$ die Bilinearform
$$f''(u)(x, y) = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j f(u)x_iy_j,$$
also $f''(u) = \Phi_{Hf(u)}$ für die *Hesse-Matrix* $Hf(u) = (\partial_i\partial_j f(u))_{i,j}$.
5. Auf $C([a, b])$ die Abbildung $\Phi(f, g) := \int_a^b f(t)g(t)\sin(t)dt$

Matrixdarstellung von Bilinearformen

Sei Φ eine Bilinearform auf einem Vektorraum V.

1. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $\Phi = \Phi_A$, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\Phi(x,y) = \Phi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \underbrace{\Phi(e_i, e_j)}_{=: a_{ij}} = \Phi_A(x,y).$$

2. Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V,so ist die *Darstellungsmatrix* von Φ bzgl. B gerade
$$_B[\Phi]_B = A = (a_{ij})_{i,j} \quad \text{mit } a_{ij} := \Phi(b_i, b_j).$$
Für $v, w \in V$ folgt $\Phi(v,w) = (_B[v])^\top \cdot {}_B[\Phi]_B \cdot {}_B[w]$.

3. Ist $C = (c_1, \ldots, c_n)$ auch eine Basis von V, so gilt
$$_C[\Phi]_C = (_B[\mathrm{id}]_C)^\top \cdot {}_B[\Phi]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}]_C$$

Skalarprodukte

Definition (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum V ist eine symmetrische Bilinearform
$$V \times V \to \mathbb{R},\ (v,w) \mapsto \langle v|w\rangle,$$
die *positiv definit* ist, d.h. $\langle v|v\rangle > 0$ für alle $v \neq 0$ erfüllt.
Man nennt dann $(V, \langle -|-\rangle)$ einen *euklidischen Vektorraum*.

Definition (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Ein *Skalarprodukt* auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto \langle v|w\rangle$, die

- *sesquilinear* (getrennt additiv und $\langle \alpha v|\beta w\rangle = \overline{\alpha}\beta\langle v|w\rangle$),
- *hermitesch* ($\langle w|v\rangle = \overline{\langle v|w\rangle}$) und
- positiv definit ist,

also eine positiv definite *hermitesche Sesquilinearform*.

Geometrische Bedeutung und Anwendungen

- Die *Länge* von $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$.
- Der *Abstand* zwischen $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x - y\|$.
- Der *Winkel* α zwischen $x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\alpha$. ($|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.) Insbesondere: $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind orthogonal g.d.w. $\langle x, y\rangle = 0$.

Satz Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.
Das heißt: für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$.
Beweis: $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y | x \pm y\rangle = \langle x|x\rangle \pm 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle$ □

Satz Ein Parallelogramm hat genau dann gleich lange Seiten, wenn seine Diagonalen senkrecht stehen.
Das heißt: für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| = \|y\| \Leftrightarrow x + y \perp x - y$.
Beweis: $\langle x + y | x - y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|x\rangle - \langle x|y\rangle - \langle y|y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$. □

Orthonormale Vektoren in einem euklidischen Vektorraum V

Definition $v_1, \ldots, v_k \in V$ sind *orthonormal*, falls $\langle v_i | v_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Satz (Gram-Schmidt) Seien $w_1, \ldots, w_m \in V$ linear unabhängig.
Dann gibt es orthonormale $v_1, \ldots, v_m \in V$ mit $v_i \in \mathrm{LH}(w_1, \ldots, w_i)$.

Beweis Seien $v_1, \ldots, v_k$ orthonormal konstruiert. Sei $w := w_{k+1}$ und

$$w' := w - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle v_i | w\rangle v_i.$$

Dann ist w' orthogonal zu $v_1, \ldots, v_k$, da $\langle v_j | w'\rangle = \langle v_j | w\rangle - \langle v_j | w\rangle = 0$.
Setze $v_{k+1} := w'/\|w'\|$ und wiederhole bis $k + 1 = n$. □

Folgerungen

1. Jeder euklidische Vektorraum hat eine Orthonormalbasis.
2. Orthonormale Vektoren kann man zu einer ON-Basis ergänzen.
3. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, $U^\perp = \{v \in V : u \perp v \text{ für alle } u \in U\}$, so gilt $V = U \oplus U^\perp$.

Die Hauptachsentransformation

Theorem 1 Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ aus Eigenvektoren von A.

Beobachtung Seien $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$ und $B = (b_1 \ \ldots \ b_n)$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $b_1, \ldots, b_n$ bilden eine *Orthonormalbasis*,
- B ist eine *orthogonale Matrix*, d.h. $B^\top B = E_n$ bzw. $B^\top = B^{-1}$.

Begründung:

$$B^\top B = \begin{pmatrix} b_1^\top \\ \vdots \\ b_n^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^\top b_1 & \cdots & b_1^\top b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_n^\top b_1 & \cdots & b_n^\top b_n \end{pmatrix} \text{ und } b_i^\top b_j = \langle b_i | b_j \rangle$$

Also ist Theorem 1 gleichwertig zu:

Theorem 2 Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert eine orthogonale Matrix B so, dass $B^\top AB = B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat.

Vorbereitung: Eigenschaften symmetrischer Matrizen

Lemma Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch.

1. A ist selbstadjungiert: $\langle v | Aw \rangle = \langle Av | w \rangle$ für v, w in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.
2. Jeder Eigenwert von A ist reell:
   Gelte $Av = \lambda v$ mit $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. (*)
   Dann ist $\overline{\lambda}\langle v | v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle Av | v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle v | Av \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \langle v | v \rangle_{\mathbb{C}^n}$,
   also $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.
3. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal:
   Gilt (*) und $Aw = \mu w$, so folgt
   $\lambda \langle v | w \rangle = \langle Av | w \rangle = \langle v | Aw \rangle = \mu \langle v | w \rangle$, also $\langle v | w \rangle = 0$.
4. Gilt (*), so bildet A den Unterraum $v^\perp$ auf sich ab:
   Aus $\langle v | w \rangle = 0$ folgt $\langle v | Aw \rangle = \langle Av | w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle = 0$.

Beweis zur Hauptachsentransformation

Theorem Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ aus Eigenvektoren von A.

Beweisidee: Induktion über n. Wähle

- einen normierten EV $b_1 \in \mathbb{R}^n$ zu einem EW $\lambda \in \mathbb{R}$ (geht nach (ii))
- eine Orthonormalbasis $b_2', \ldots, b_n'$ von $v^\perp$

und setze $B' := (b_1 \; b_2' \; \ldots \; b_n')$. Nach (iii) gilt

$$B'^{\top} A B' = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & C \end{pmatrix} \text{ für ein } C \in M_{n-1}(\mathbb{R})$$

und C ist symmetrisch, weil $B'^{\top} A B'$ symmetrisch ist.

Folgerung Ist Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, so existiert eine Basis B mit

$${}_B[\Phi]_B = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{pmatrix} \text{ mit } (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ mal}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{l \text{ mal}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ mal}}),$$

Satz (Trägheitssatz von Sylvester) Die *Signatur* (k, l, m) hängt nur von Φ und nicht von B ab.

Thema nächste Woche

metrische Räume, Konvergenz und Stetigkeit