Anmeldung zur Prüfung

2-Fach-Bachelor-Studierenden+Bachelor-Berufskolleg-Studierenden,
die am Ende dieses Semesters (29.03. - 15.04.2016)
die mündliche Prüfung im Modul 5
(über LA I + Geom. LA (bzw. LA II) + Analysis I/II)
absolvieren möchten,
müssen sich zur internen Prüferzuteilung bis zum 31.12.2015 über

wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/anmpruf/info.html

(und dann ab Februar noch mal im QISPOS) anmelden.

Ansprechpartnerin für die Verteilung ist Anja Böckenholt.

Differenzierbarkeit reeller Funktione

Wir betrachten eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definition Man nennt $f: D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar* in $x \in D$, falls

1. ein $\delta > 0$ mit $(x - \delta, x + \delta) \in D$ existiert und
2. für den Differenzenquotienten

$$\Delta f(x, x') := \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

der Grenzwert $\lim_{x' \to x} \Delta f(x, x') =: f'(x)$ existiert.

Geometrische Bedeutung Der Differenzenquotient $\Delta f(x, x')$ ist der Anstieg der Sekante an den Graphen von f in den Punkten x und x'.
Die Funktion f ist differenzierbar in x genau dann, wenn dieser Anstieg für $x' \to x$ gegen einen Grenzwert konvergiert.
Dieser Grenzwert ist dann der Anstieg der Tangente an den Gaphen in x.

Ableitung von Produkten — die Produktregel

Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta fg(x,x') &= \frac{f(x')g(x') - f(x)g(x)}{x'-x} \\ &= \frac{f(x')g(x') - f(x')g(x) + f(x')g(x) - g(x)f(x)}{x'-x} \\ &= f(x')\frac{g(x')-g(x)}{x'-x} + g(x)\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \\ &= f(x')\Delta g(x,x') + g(x)\Delta f(x,x')\end{aligned}$$

Im Fall $x' \to x$ folgt dann

$$\Delta fg(x,x') \to f(x)g'(x) + g(x)f'(x),$$

also

$$\boxed{(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$$

Ableitung von Verknüpfungen — die Kettenregel

Seien $f: D_f \to \mathbb{R}$ in $x \in D_f$ und $g: D_g \to \mathbb{R}$ in $f(x) \in D_g$ differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta(f \circ g)(x,x') &= \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{x'-x} \\ &= \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{g(x')-g(x)} \cdot \frac{g(x')-g(x)}{x'-x} \\ &= \Delta f(g(x), g(x')) \cdot \Delta g(x,x')\end{aligned}$$

Im Fall $x' \to x$ folgt $g(x') \to g(x)$ und somit

$$\Delta(f \circ g)(x,x') \to f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

also

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)}$$

Ableitung von inversen Funktionen

Sei $f: D \to B$ bijektiv und in $x \in D$ differenzierbar und sei $y = f(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta f^{-1}(f(x), y') &= \frac{f^{-1}(y') - f^{-1}(y)}{y' - y} \\ &= \frac{f^{-1}(y') - x}{f(f^{-1}(y')) - f(x)} \\ &= \frac{1}{\Delta f(x, f^{-1}(y'))}\end{aligned}$$

Ist f^{-1} stetig, so folgt im Fall $y' \to y$ auch $f^{-1}(y') \to f^{-1}(y) = x$ und

$$\Delta f^{-1}(f(x), y') \to \tfrac{1}{f'(x)}$$

also

$$\boxed{(f^{-1})'(f(x)) = \tfrac{1}{f'(x)}}$$

Lokale Extrema und der Mittelwertsatz

Satz A Nimmt $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ in $x \in D$ ein lokales Extremum an und ist f in x differenzierbar, so folgt $f'(x) = 0$.

Beweis Sei z.B. x ein lokales Maximum. Dann ist

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}}}_{\geq 0 \text{ für große } n} = f'(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}}_{\leq 0 \text{ für große } n} \leq 0$$

□

Mittelwertsatz Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = (\Delta f)(a, b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Beweis Wir betrachten erst den Fall $f(b) = f(a)$ (Satz von Rolle):

- Fall f konstant: wähle $x \in (a, b)$ beliebig.
- Fall f nicht konstant: f nimmt in einem $x \in (a, b)$ ein globales Extremum an, nach Satz A folgt $f'(x) = 0$.

Im Fall $f(a) \neq f(b)$ wird der Spezialfall auf $g(t) := f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t - a)$ angwendet. Beachte, dass $g(a) = f(a) = g(b)$ und $f'(x) = g'(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Partielle Ableitungen einer Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$

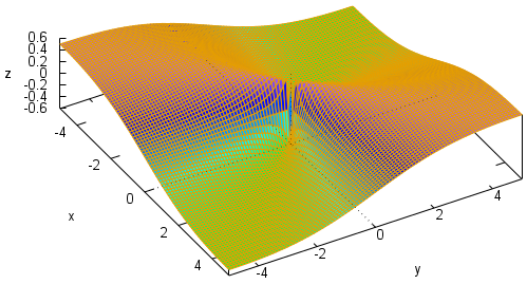
Definition f heißt in $x \in U$ *partiell differenzierbar*, falls für alle i die

partielle Ableitung $\partial_i f(x) = \lim\limits_{x_i' \to x_i} \frac{f(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{x_i' - x_i}$

existiert, also $f(x_1,\ldots,x_{i-1},_,x_{i+1},\ldots,x_n)$ in x_i differenzierbar ist.

Beispiel Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$



ist in dem Punkt $(0,0)$

- partiell differenzierbar mit $\partial_i f(0,0) = 0$, da $f(_,0) \equiv 0 \equiv f(0,_)$;
- nicht stetig, weil z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

Richtungsableitungen einer Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$

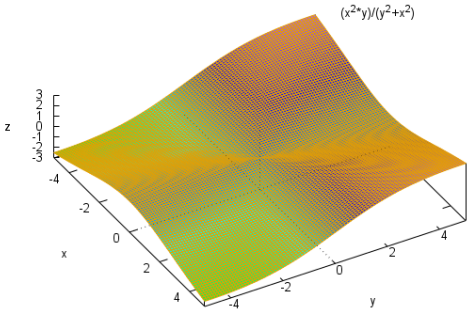
Definition Die *Richtungsableitung* von f in x *in Richtung* $h \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\partial_v f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Spezialfall Die partielle Ableitung $\partial_i f(x)$ ist $\partial_v f(x)$ für $v = e_i$.

Beispiel Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$



hat in dem Punkt $(0,0)$

- alle Richtungsableitungen: für $v = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ ist $f(tv) = t\cos^2\phi\sin\phi$
- keine gute lineare Approximation/keine Tangentialebene, weil $\partial_v f(0) = \cos^2\phi\sin\phi$ nicht linear von $v = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ abhängt

Die totale Ableitung einer Funktion $f: U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition f heißt in $x \in U$ *(total) differenzierbar*, falls es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, also eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, gibt mit

$$f(x+v) \sim f(x) + Av \text{ für kleine } v \in \mathbb{R}^n$$

beziehungsweise genauer mit

$$\lim_{x' \to x} \frac{\|f(x') - (f(x) + A(x'-x))\|}{\|x'-x\|} = 0.$$

Dann heißt $f'(x) := A$ die *Ableitung* von f im Punkt x.

Bemerkung Die Wahl der Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ spielt keine Rolle.

Beispiel Die Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, x\rangle$, ist differenzierbar, denn

$$f(x+v) = \langle x+v, x+v\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,v\rangle + \langle v,v\rangle = f(x) + 2x^\top v + \langle v,v\rangle$$

und mit $A := 2x^\top$ folgt $\lim_{v\to 0} \frac{|f(x+v) - (f(x)+Av)|}{\|v\|} = \lim_{v\to 0} \frac{|\langle v,v\rangle|}{\|v\|} = 0$

Die Einträge der Ableitung $f'(x)$

Satz Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist

1. f in x stetig;
2. jede der Komponenten $f_1, \ldots, f_m$ in x partiell differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \quad (\textit{Jacobi-Matrix von } f \textit{ in } x).$$

Beweis von 2. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Da f differenzierbar ist, gilt

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - (f(x) + f'(x)tv)}{\|tv\|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x) - f'(x)tv}{t}$$

und somit $f'(x)v = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \partial_v f(x) = \begin{pmatrix} \partial_v f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_v f_m(x) \end{pmatrix}$.

Die Behauptung folgt, indem man $v = e_1, \ldots, e_n$ setzt.

Stetige partielle impliziert totale Differenzierbarkeit

Theorem Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell diff.bar, d.h., die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ existieren und sind stetig. Dann ist f differenzierbar.

Beweis OBdA ist $m = 1$. Zu zeigen: f ist in jedem $x \in U$ diff.bar mit

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \dots & \partial_n f(x) \end{pmatrix} =: A$$

Wir verwenden gleich die 1-Norm $\| - \|_1$, def. durch $\|v\|_1 := \sum_i |v_i|$.
Sei $\epsilon > 0$. Da die $\partial_i f$ stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\partial_i f(z) - \partial_i f(x)| < \epsilon \text{ für alle } z \in U \text{ mit } \|z - x\|_1 < \delta.$$

Sei nun $x' \in U$ mit $\|x - x'\|_1 < \delta$. Wir zeigen:

$$\frac{|f(x') - (f(x) + A(x' - x))|}{\|x' - x\|_1} < \epsilon. \qquad (1)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt dann $f'(x) = A$.
Hauptidee des Beweises von (1): Wir schreiben

$$f(x') - f(x) = f(x^{(0)}) - f(x^{(1)}) + f(x^{(1)}) - f(x^{(2)}) + \dots + f(x^{(n-1)}) - f(\underset{11/11}{x^{(n)}})$$

mit Hilfspunkten

$$x^{(i)} := (x_1, \dots, x_i, x'_{i+1}, \dots, x'_n) \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Da sich $x^{(i)}$ und $x^{(i+1)}$ nur in der i-ten Koordinate unterscheiden, gibt es nach dem Mittelwertsatz zwischen $x^{(i)}$ und $x'^{(i+1)}$ ein $z^{(i)}$ mit

$$f(x^{(i)}) - f(x^{(i+1)}) = \partial_i f(z^{(i)})(x'_i - x_i).$$

Insgesamt folgt

$$f(x') - f(x) = \sum_i \partial_i f(z^{(i)})(x'_i - x_i)$$

und somit (1):

$$\left| f(x') - f(x) - \sum_i \partial_i f(x)(x'_i - x_i) \right| = \sum_i |\partial_i f(z^{(i)}) - \partial_i f(x)||x'_i - x_i| \le \epsilon \|x' - x\|_1.$$