Das Riemann-Integral mittels Ober- und Untersummen

Schritte zum Riemann-Integral einer beschränkten Fkt. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$:

1. Wähle eine *Zerlegung* $\mathcal{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a,b]$, d.h. $a = x_0 < \cdots < x_n = b$.
2. Bilde die *Unter-* und *Obersumme*

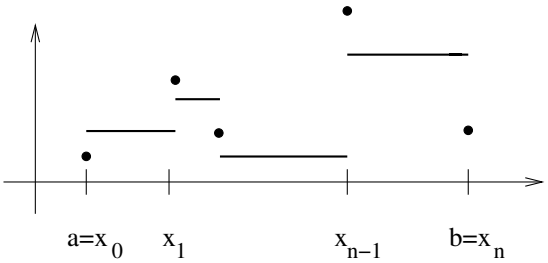
$$US(f;\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x),$$

$$OS(f;\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x).$$

3. Bilde durch Übergang zu beliebigen Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ das
   - *Unterintegral* $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\mathcal{Z}} US(f;\mathcal{Z})$
   - *Oberintegral* $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\mathcal{Z}} OS(f;\mathcal{Z})$
4. Die Funktion f heißt *Riemann-integrierbar*, falls $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$
5. Äquivalent dazu: $\forall \epsilon > 0 \exists$ Zerlegung $\mathcal{Z} : OS(f,\mathcal{Z}) - US(f;\mathcal{Z}) < \epsilon$

Das Integral für Treppenfunktionen

Definition Ein $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion,* falls



es $a = x_0 < \ldots x_n = b$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $\phi|_{(x_{k-1},x_k)} \equiv \lambda_k$.
Bezeichne $\mathcal{T}([a,b])$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

Beobachtungen Treppenfunktionen sind einfach zu integrieren:

1. Für jede Treppenfunktion ϕ gilt $\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\lambda_k$.
2. Die Menge $\mathcal{T}([a,b])$ ist ein reeller Vektorraum.
3. Die Abbildung $\mathcal{T}([a,b]) \ni \phi \mapsto \int_a^b \phi(x)dx \in \mathbb{R}$ ist linear.
4. Diese Abbildung ist *positiv*, d.h. aus $\phi \geq 0$ folgt $\int_a^b \phi(x)dx \geq 0$.

Alternative Definition des Integrals mittels Treppenfunktionen

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Beobachtung Für jede Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ gilt:

- $US(f;\mathcal{Z}) = \int_a^b \phi(x)dx$ mit $\phi|_{(x_{k-1},x_k)} :\equiv \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x)$
- $OS(f;\mathcal{Z}) = \int_a^b \psi(x)dx$ mit $\psi|_{(x_{k-1},x_k)} :\equiv \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x)$

Folgerung Es gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{\int_a^b \phi(x)dx : \phi \in \mathcal{T}([a,b]), \phi \le f\}$$

und

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{\int_a^b \psi(x)dx : \phi \in \mathcal{T}([a,b]), \psi \ge f\}.$$

Man kann also das (Ober-/Unter-)Integral statt mit Ober- und Untersummen mit Hilfe von Treppenfunktionen definieren.

Satz Die Menge $I([a,b])$ der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ ist ein Vektorraum. Die Abbildung $I([a,b]) \ni f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist linear, positiv und stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, d.h. $|\int_a^b f(x)dx| \le \sup_{a\le x\le b} |f(x)|$.

Klassen integrierbarer Funktionen

Satz Jede monotone Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis: Einfach.

Satz Jede stetige Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Da f *gleichmäßig stetig* ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ für alle k. Dann folgt

$$OS(f;\mathcal{Z}) - US(f;\mathcal{Z}) \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\epsilon = (b-a)\epsilon.$$

Vertauschbarkeit von Integral und Limes

Satz Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $I([a,b])$, die *gleichmäßig* gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist $f \in I([a,b])$ und

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Beispiel Die Folge der Treppenfunktionen

$$\phi_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \begin{cases} 2n, & \frac{1}{2n} \le x \le n, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

konvergiert *punktweise* gegen 0, aber nicht gleichmäßig, und

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 0dx.$$

Beweisidee zum Satz: Sei $\epsilon > 0$. Wähle N mit $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ für alle $n \ge N$. Sei $n \ge N$. Dann gilt

$$f_n(x) - \epsilon \le f(x) \le f_n(x) + \epsilon \text{ für alle } x \in [a,b]$$

und darum

$$\int_a^b (f_n(x) - \epsilon)dx \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le \int_a^b (f_n(x) + \epsilon)dx.$$

Eine große Klasse integrierbarer Funktionen: Regelfunktionen

Definition Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, falls

- für jedes $x_0 \in (a,b]$ der Grenzwert $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ existiert und
- für jedes $x_0 \in [a,b)$ der Grenzwert $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ existiert.

Beispiel (1) Stetige Funktionen; (2) monotone Funktionen; (3) Treppenfunktionen.

Satz Eine Funktion f ist eine Regelfunktion genau dann, wenn es eine Folge $(\phi_n)_n$ von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Folgerung Jede Regelfunktion ist integrierbar.

Beispiel Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ ist keine Regelfunktion (leicht), aber Riemann-integrierbar (schwieriger).

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung I

Hauptsatz, Teil 1: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int_a^t f(x)dx,$$

auf (a,b) differenzierbar mit $F' = f$.

Beweis: Sei $a < t < t' < b$. Dann ist

$$\Delta F(t,t') = \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} = \frac{\int_t^{t'} f(x)dx}{t' - t} \in \left[\min_{t \le x \le t'} f(x), \max_{t \le x \le t'} f(x)\right].$$

Mit dem Zwischenwertsatz für f auf $[t,t']$ folgt

$$\Delta F(t,t') = f(\xi) \text{ für ein } \xi \in [t,t'],$$

also $\lim_{t' \to t} \Delta F(t,t') = f(t)$.

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung II

Hauptsatz, Teil 2: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $F\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, $a,b \in I$ mit $a < b$ und $f := F'$ auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Sei $\mathcal{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung. Dann gilt

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) F'(\xi_k)$$

für gewisse $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ nach dem MWS der DR, also

$$US(f;\mathcal{Z}) \le F(b) - F(a) \le OS(f;\mathcal{Z}).$$

Da $\mathcal{Z}$ beliebig war, folgt

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ gegeben.

Definition $F: I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls $F' = f$.

Folgerungen

1. Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist $F - G$ konstant. (Denn $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$).
2. (Hauptsatz 1) Ist f stetig, so wird für jedes $a \in I$ durch $F(t) := \int_a^t f(x)dx$ eine Stammfunktion definiert.
3. (Hauptsatz 2) Für jede Stammfunktion F und alle $a, b \in I$ mit $a < b$ gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Beispiele

1. Stammfkt. von x^k $(k \neq -1)$ ist $\frac{1}{k+1}x^{k+1} \Rightarrow \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$
2. Stammfkt. von e^x ist $\mathrm{e}^x \Rightarrow \int_a^b \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$
3. Stammfkt. von $\cos x$ ist $\sin x \Rightarrow \int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$
4. Stammfkt. von $\frac{1}{x}$ ist $\ln x \Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a$ für $0 < a < b$

Anwendungen: partielle Integration und Substitution

Satz Seien $u, v: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann ist

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Beweis uv ist Stammfunktion von $(uv)' = u'v + u'v$, also

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Satz Seien $f: U \to \mathbb{R}$ stetig, $g: I \to U$ stetig differenzierbar und $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann ist

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

Beweis Setze

$$H(t) := \int_a^t f(g(x))g'(x)dx \text{ und } F(t) = \int_{g(a)}^t f(y)dy$$

Dann gilt $H(b) = F(g(b))$, weil

1. nach Definition $H(a) = 0 = F(g(a)) = (F \circ g)(a)$;
2. nach dem 1. Hauptsatz $H'(t) = f(g(t))g'(t)$ und $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$.