Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe

Satz Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ gibt es eine Zahl $R>0$, den *Konvergenzradius*, mit folgender Eigenschaft: die Reihe

1. *konvergiert absolut* für alle x mit $|x-x_0|<R$,
2. *divergiert* für alle x mit $|x-x_0|>R$.

Dabei gilt (Cauchy-Hadamard): $R=\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (*).

Beweis Sei R wie in (*). Wurzelkriterium $\Rightarrow$
die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiert absolut bzw. divergiert,
falls $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}=\frac{|x-x_0|}{R}$ kleiner als 1 bzw. größer als 1 ist.

Folgerung Auf jedem *kompakten* Intervall $[a,b]\subseteq(x_0-R,x_0+R)$ konvergieren die Polynome $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$ *gleichmäßig* gegen die Funktion $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Satz Die Funktion $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

ist (1) stetig und (2) beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}. \quad (**)$$

Beweis von (2) Sei $x\in(x_0-R,x_0+R)$ und oBdA $x\geq x_0$.
Die Potenzreihe $g(t):=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(t-x_0)^{n-1}$ hat den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{na_n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=R.$$

Die Polynome $S_N'(t)=\sum_{n=1}^{N} na_n(t-x_0)^n$ konvergieren auf $[x_0,x]$ gleichmäßig gegen $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(t-x_0)^{n-1}$. Daraus folgt:

$$f(x)=\lim_{N\to\infty} S_N(x)=\lim_{N\to\infty}\int_{x_0}^{x} S_N'(t)dt=\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty} na_n(t-x_0)^n dt$$

Hauptsatz der DR und IR, Teil 1, liefert nun (**).

Die Taylor-Reihe einer Funktion

Gegeben seien eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in (a,b)$.

Frage Kann man f um x_0 in eine Potenzreihe entwickeln? D.h. gilt

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

für geeignete Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$?

Falls ja, so ist f um x_0 beliebig oft differenzierbar und es folgt

- die Gleichung $f(x_0) = a_0$
- aus $f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots$ die Gleichung $f'(x_0) = a_1$
- aus $f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \cdots$ die Gleichung $f''(x_0) = 2a_2$
- allgemein $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ beziehungsweise $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Definition Ist f in x_0 hinreichend oft differenzierbar, so heißt

- $T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ die *Taylor-Reihe* von f in x_0
- $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \cdots$ das *Taylorpolynom* n-ter Ordnung von f in x_0

Konvergenzverhalten der Taylorreihe

Frage Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$? ·Falls ja, gegen $f(x)$?

Beispiel Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^{-1/x}, & x > 0, \end{cases}$ und $x_0 = 0$ ist $T(x) \equiv 0$.

Satz Sei f $(n+1)$-mal stetig diffbar. Dann gilt

$$f(x) = \underbrace{\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_n(x)} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Beweis: 1. Induktionsanfang: $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$. 2. Induktionsschritt: partielle Integration liefert

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt = -\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(t-x)^{n+1} dt$$

Folgerung (Anwendung des Zwischenwertsatzes)

$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ für ein ξ zwischen x und x_0.